МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ДГТУ)

ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ»

Ростов-на-Дону

2022

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Изучение курса «Моделирование систем и процессов» позволит студентам получить знания и умения, необходимые для разработки моделей технических систем различного назначения для проведения компьютерного эксперимента. **Целью дисциплины** является изучение особенностей и возможностей применения методов моделирования систем различных классов в реальных условиях, возникающих при проведении научных исследований.

Выполненные лабораторные работы скрепляются одним титульным листом, на котором указываются фамилия, имя, отчество студента, название специальности, номер учебной группы и номер зачетной книжки.

Вариант задания определяется по последней цифре зачетной книжки студента, где 0 − это 10 вариант.

Лабораторные работы рекомендуется оформлять на листах формата А4 с помощью текстового редактора Word. Размер шрифта Times New Roman − 14 пт, одинарный междустрочный интервал.

В начале каждого задания следует привести его полную формулировку.

Изложение материала в выполненной работе должно быть кратким, в виде конспекта, решения задач представлены скриншотами.

Выполненная работа предъявляется на рецензию преподавателю. Работа, неправильно оформленная или выполненная не для своего варианта, к рецензии не принимается.

Лабораторная работа № 1. Наилучшее приближение непрерывных функций на множестве полиномов (метод наименьших квадратов)

Краткая теория

Рассмотрим множество (пространство) V^3 геометрических векторов (направленных отрезков) в пространстве. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, … из множества V^3 можно задать их координатами в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ (рис. 1): $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, … так, что $\bar{a} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}$, $\bar{b} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}$, …

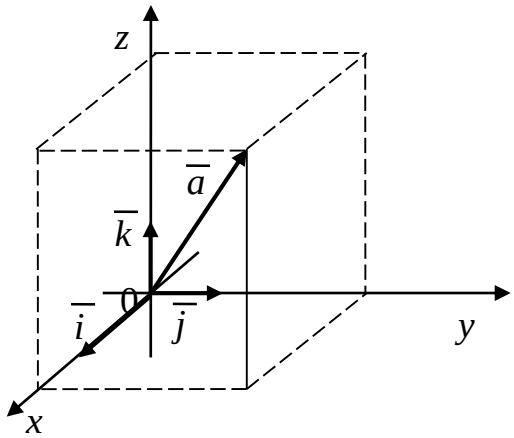


Рис. 1. Определение вектора в пространстве V^3.

В пространстве V^3 определим скалярное произведение векторов $\bar{a}, \bar{b} \in V^3$ по правилу

$$(\bar{a}, \bar{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \qquad (1)$$

Введем в рассмотрение множество (пространство) R^3, элементами которого являются наборы из трех чисел $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, …, а также скалярное произведение в R^3 по правилу (1).

Рассмотрим следующую задачу. Пусть $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \in R^3$, $\bar{a}$ – заданный элемент, L – заданная в системе координат $xOyz$ плоскость. Требуется найти элемент $\bar{u}^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)$ такой, что для всех элементов $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3) \in L$ выполняется

$$\rho(\bar{a}, \bar{u}^*) = \min_{\bar{u} \in L} \rho(\bar{a}, \bar{u}). \qquad (2)$$

Равенство (2) задает расстояние между двумя элементами $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3) \in R^3$ и $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3) \in R^3$, которое равно

$$\rho(\bar{a}, \bar{b}) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}. \qquad (3)$$

Элемент $\bar{u}^*$, определенный в условии (2), называется **элементом наилучшего приближения** (ЭНП) для $\bar{a}$. Согласно условию (2), он является наиболее близким к элементу $\bar{a}$ в L.

Решение задачи может быть найдено геометрически (рис. 2.).

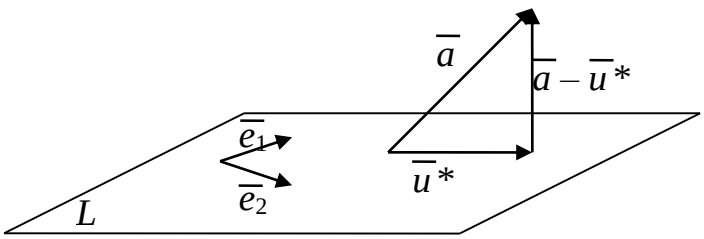


Рис. 2. Определение элемента наилучшего приближения

Действительно, если $\bar{u}^*$ – ЭНП для $\bar{a}$, то $\bar{u}^*$ является проекцией вектора $\bar{a}$ на плоскость L. Это означает, что вектор $\bar{a}-\bar{u}^*$ перпендикулярен любому вектору, лежащему в L. Пусть $\overline{e_1}$ и $\overline{e_2}$ – два неколлинеарных вектора, лежащих в плоскости L. Тогда любой вектор $\bar{u}\in L$ представим в виде

$$\bar{u}=u_1\overline{e_1}+u_2\overline{e_2}\,. \tag{4}$$

При этом, если $\bar{u}=\overline{u^*}$, то должно выполняться

$$\left(\bar{a}-\bar{u},\ \overline{e_1}\right)=0\,;\ \left(\bar{a}-\bar{u},\ \overline{e_2}\right)=0\,.$$

Получаем СЛАУ относительно переменных $u_1,\ u_2$ в (4):

$$\begin{aligned} u_1\left(\overline{e_1},\ \overline{e_1}\right)+u_2\left(\overline{e_2},\ \overline{e_1}\right)&=\left(\overline{a_1},\ \overline{e_1}\right);\\ u_1\left(\overline{e_1},\ \overline{e_2}\right)+u_2\left(\overline{e_2},\ \overline{e_2}\right)&=\left(\overline{a_1},\ \overline{e_2}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

В результате решения СЛАУ (5) находятся значения $u_1,\ u_2$ и далее ЭНП вида (4).

Обобщим полученный результат. Введем в рассмотрение множество (пространство) R^n, элементами которого служат наборы из n действительных чисел $\bar{a}=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$, $\bar{b}=(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)$, … .

Введем в R^n скалярное произведение $\left(\bar{a},\ \bar{b}\right)$ и расстояние $\rho\left(\bar{a},\ \bar{b}\right)$ по правилам:

$$\left(\bar{a},\ \bar{b}\right)=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\,; \tag{6}$$

$$\rho\left(\bar{a},\ \bar{b}\right)=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\ldots+(a_n-b_n)^2}\,. \tag{7}$$

Пусть $\overline{e_1},\ \overline{e_2},\ \ldots,\ \overline{e_m}$ $(m<n)$ – заданные элементы в R^n, такие, что ни один из них не может быть выражен через другие. Рассмотрим в R^n множество L, элементы которого допускают представление

$$\bar{u}=\alpha_1\overline{e_1}+\alpha_2\overline{e_2}+\ldots+\alpha_m\,\overline{e_m}\in L\,. \tag{8}$$

Пусть $\bar{a}$ - заданный элемент в R^n. Будем искать ЭНП $\bar{u}=\bar{u}^*$ для $\bar{a}$ в L так, чтобы обеспечить выполнение условия (2) для расстояния (7). Также как и в случае R^3, можно показать, что в любом пространстве R^n $(n\geq 3)$ ЭНП вида (8) может быть найден в результате решения СЛАУ

$$\left(\bar{a}-\bar{u},\ \overline{e_k}\right)=0,\ k=\overline{1,\ m}\,,$$

где скалярное произведение понимается в смысле R^n (6).

В результате получаем СЛАУ

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\left(\overline{e_i},\ \overline{e_k}\right)=\left(\bar{a},\ \overline{e_k}\right),\ k=\overline{1,\ m}\,. \tag{9}$$

Находя решение СЛАУ (9) и подставляя значения $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m$ в равенство (8), находим ЭНП для $\bar{a}$.

Рассмотрим теперь следующую задачу. Пусть функция $y = f(t)$ задана своими значениями в n – узлах t_i, $i = \overline{1, n}$. Рассмотрим множество P^m – полиномов степени не выше m, каждый элемент которого $u(t) \in P^m$ представим в виде

$$u = u(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_m t^m. \qquad (10)$$

Требуется найти полином $u = u^*(t)$ такой, чтобы его значения в узлах $u_i = u(t_i)$ были как можно ближе к значению функций $y = f(t)$ в этих точках $y_i = f(t_i)$, $i = \overline{1, n}$. При этом меру близости $u(t)$ и $y = f(t)$ будем понимать (как в пространстве R^n) в следующем смысле:

$$\rho(\bar{y}, \bar{u}) = \sqrt{(y_1 - u_1)^2 + (y_2 - u_2)^2 \ldots + (y_n - u_n)^2}, \qquad (11)$$

где $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ – значения функций, $y_k = f(t_k)$; $\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ – значения полинома, $u_k = u(t_k)$.

Заметим, что согласно равенству (11), $\rho(\bar{y}, \bar{u})$=0 тогда и только тогда, когда $y_k = u_k$, $k = \overline{1, n}$.

Сформулированная задача имеет единственное решение, если для степени полинома выполняется условие $m + 1 \le n$, и среди чисел t_i, t_j $(i \ne j)$ нет равных.

Согласно постановке задачи, для искомого полинома $u = u^*(t)$, значения которого в точках t_k, $k = \overline{1, n}$ равны $u_k^* = u_k^*(t_k)$, должно выполняться:

$$\rho(\bar{y}, \bar{u}^*) = \min_{\bar{u} \in L} \rho(\bar{y}, \bar{u}),$$

где множество L будет определено ниже.

Удовлетворяющий этому условию полином называется **полиномом наилучшего приближения**. Перейдем к решению задачи. Замечаем, что согласно равенству (10):

$$\begin{aligned} u_1 &= u(t_1) = \alpha_0 + \alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_1^2 + \ldots + \alpha_m t_1^m; \\ u_2 &= u(t_2) = \alpha_0 + \alpha_1 t_2 + \alpha_2 t_2^2 + \ldots + \alpha_m t_2^m; \\ u_n &= u(t_n) = \alpha_0 + \alpha_1 t_n + \alpha_2 t_n^2 + \ldots + \alpha_m t_n^m. \end{aligned} \qquad (12)$$

Введем следующие обозначения. Пусть

$$\bar{e}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \ldots \\ t_n \end{pmatrix}; \bar{e}_m = \begin{pmatrix} t_1^m \\ t_2^m \\ \ldots \\ t_n^m \end{pmatrix}; \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \ldots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Тогда система (12) записывается в виде:

$$\bar{u} = \alpha_0 \bar{e}_1 + \alpha_1 \bar{e}_2 + \ldots + \alpha_m \bar{e}_m. \qquad (13)$$

Введем в R^n подмножество $L \subset R^n$, каждый элемент которого представим в виде (13). Будем искать ЭНП для элемента $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots y_n) \in R^n$ на множестве L. Получаем, что ЭНП находится из условия:

$$(\bar{y} - \bar{u}, \bar{e}_n) = (\bar{y}, \bar{e}_n) - \sum_{i=0}^{m} \alpha_i (\bar{e}_i, \bar{e}_n) = 0, \quad n = \overline{0, m};$$

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_1 (\bar{e}_i, \bar{e}_k) = (\bar{y}, \bar{e}_k), \quad k = \overline{0, m}. \qquad (14)$$

Решая СЛАУ (14), можно найти неизвестные $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, затем ЭНП вида (13) в $L \subset R^n$, после этого полином наилучшего приближения (ПНП) – $u(t)$ для функции $y(t)$, расстояние между которыми понимается в смысле расстояния между наборами их значений в узлах t_j, $j = \overline{1, n}$. При этом полином наилучшего приближения в указанном выше смысле задается равенством (13).

Найдем скалярные произведения в системе (14), учитывая, что

$$\bar{e}_i = \begin{pmatrix} t_1^i \\ t_2^i \\ \ldots \\ t_n^k \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_k = \begin{pmatrix} t_1^k \\ t_2^k \\ \ldots \\ t_n^k \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

$$(\bar{e}_i,\ \bar{e}_k) = t_1{}^i t_1{}^k + t_2{}^i t_2{}^k + \ldots + t_n{}^i t_n{}^k = \sum_{j=1}^{n} t_j{}^{i+k};$$

$$(\bar{y}_1,\ \bar{e}_k) = y_1 t_1{}^k + y_2 t_2{}^k + \ldots + y_n t_n{}^k = \sum_{j=1}^{n} y_k t_j{}^k.$$

Подстановка полученных значений в СЛАУ (14), позволяет найти ее решение $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Пример. Найти ЭНП на множестве полиномов степени не выше 2, если функция $y = y(t)$ задана своими значениями в точках $\{t_k\}_{k=1}^5 = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$, которые равны $\{y_k\}_{k=1}^5 = \{16,\ 1,\ 0,\ 1,\ 16\}$, где $y_k = y(t_k)$, $k = \overline{1,\ 5}$.

Решим рассмотренную выше общую задачу для частного случая n=5; m=2. При этом имеем

$$\bar{e}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 16 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 16 \end{pmatrix};$$

$(\bar{e}_0, \bar{e}_0) = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 5$;

$(\bar{e}_0, \bar{e}_1) = -2 - 1 + 0 + 1 + 2 = 0 = (\bar{e}_1, \bar{e}_0)$;

$(\bar{e}_0, \bar{e}_2) = 4 + 1 + 1 + 4 = 10 = (\bar{e}_2, \bar{e}_0)$;

$(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = 4 + 1 + 1 + 4 = 10$;

$(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 0 = (\bar{e}_2, \bar{e}_1)$;

$(\bar{e}_2, \bar{e}_2) = 16 + 1 + 1 + 16 = 34$;

$(\bar{e}_0, \bar{y}) = 16 + 1 + 1 + 16 = 34$;

$(\bar{e}_1, \bar{y}) = -32 - 1 + 1 + 32 = 0$;

$(\bar{e}_2, \bar{y}) = 64 + 1 + 1 + 64 = 130$.

Получаем СЛАУ вида (14):

$$\begin{cases} 5\alpha_0 + 0 \cdot \alpha_1 + 10\alpha_2 = 34; \\ 0\alpha_0 + 10\alpha_1 + 0\alpha_2 = 0; \\ 10\alpha_0 + 0\alpha_1 + 34\alpha_2 = 130; \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha_1 = 0; \\ 5\alpha_0 + 10\alpha_2 = 34; \\ 10\alpha_0 + 34\alpha_2 = 130; \end{cases}$$

$14\alpha_2 = 62$; $\alpha_2 = \dfrac{31}{7} = 4{,}4$; $5\alpha_0 = -10$; $\alpha_0 = -2$.

Находим элемент наилучшего приближения $u^* = -2 + 4{,}4t^2$. На рис. 3 представлены графики исходной функции $y(t)$ и ЭНП $u^*(t)$.

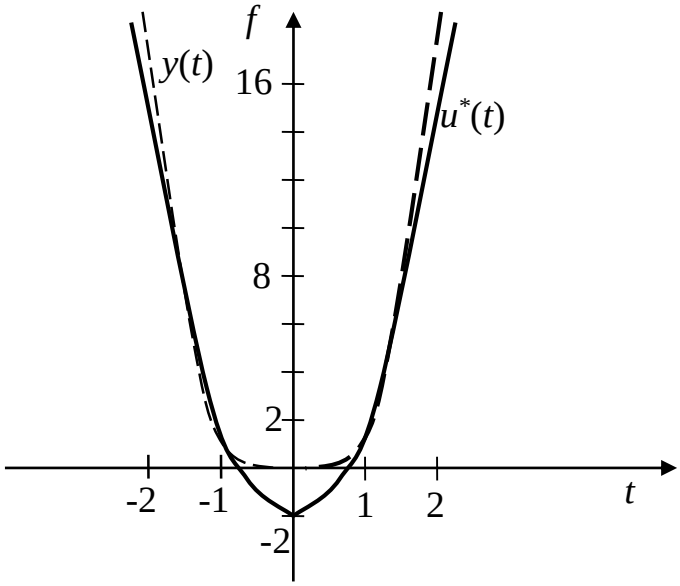


Рис. 3. Исходный многочлен $y(t)$ (- - - -) и ЭНП $u^*(t)$ (——)

Примеры применения метода наименьших квадратов для аппроксимации функции, заданной таблицей

На практике часто возникает задача, когда требуется найти функциональную зависимость $y = f(x)$ между двумя наборами данных $x_1, x_2, ..., x_n$ и $y_1, y_2, ..., y_n$. Для решения такой задачи может использоваться метод наименьших квадратом.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть имеется набор точек (x_k, y_k), $k = \overline{1, n}$. Требуется подобрать функцию $y = f(x)$ такую, чтобы ее значения $f(x_k)$ наилучшим образом приближали значения y_k, то есть разница между значениями $f(x_k)$ и y_k по всех $k = \overline{1, n}$ была как можно ближе к нулю.

Рассмотрим функцию:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(f(x) - y_k \right)^2 ,$$

и потребуем, чтобы

$$F(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(f(x_k) - y_k \right)^2 \to \min . \qquad (15)$$

Заметим, что для функции $F(x)$ в силу ее задания, значение ноль является наименьшим. Функцию $y = f(x)$ можно задавать разными способами, выбирая ее из класса линейных, квадратичных, экспоненциальных и др. функций. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Функция $y = f(x)$ выбирается из класса линейных функций, то есть $y = f(x) = c_1 x + c_2$, тогда из (15) получаем

$$F(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \left(c_1 x_k + c_2 - y_k \right)^2 \to \min . \qquad (16)$$

Подберем параметры для определения функции $y = f(x)$, используя необходимое условие экстремума для функций многих переменных:

$$\frac{\partial F}{\partial c_1} = \sum_{k=1}^{n} 2(c_1 x_k + c_2 - y_k) x_k = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial c_2} = \sum_{k=1}^{n} 2(c_1 x_k + c_2 - y_k) = 0.$$

Преобразуя записанные уравнения, получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 = b_1; \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 = b_2, \end{cases} \tag{17}$$

где $a_{11} = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$; $a_{12} = a_{21} = \sum_{k=1}^{n} x_k$; $a_{22} = n$; $b_1 = \sum_{k=1}^{n} y_k x_k$; $b_2 = \sum_{k=1}^{n} y_k$.

Для определения коэффициентов системы (17) воспользуемся следующими функциями Excel:

– СУММ(арг), которая суммирует значения ячеек указанных в арг;

– СУММКВ(агр), которая суммирует возведенные в квадрат значения ячеек, указанных в арг;

– СУММПРОИЗВ(арг1;арг2), которая перемножает соответствующие элементы диапазонов арг1 и арг2, а затем суммирует полученные произведения. Здесь важно, чтобы размеры диапазонов арг1 и арг2 совпадали.

Так как такая система уравнений имеет единственное решение, то решим ее, используя матричный метод и функции Excel. Суть его заключается в следующем. Любая СЛАУ может быть представлена в виде

$$Ax = B, \tag{18}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов системы при неизвестных; $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – столбец неизвестных; $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ – столбец свободных членов.

Решение системы (18) можно найти по формуле:

$$x = A^{-1}B, \tag{19}$$

где A^{-1} – обратная матрица для матрицы A.

В Excel для нахождения обратной матрицы имеется функция МОБР(арг), где в качестве арг указывается диапазон, в котором расположена матрица A.

Пример 1. Пусть имеется набор точек (табл. 1), для которых требуется подобрать линейную функцию $y = f(x) = c_1 x + c_2$.

Таблица 1

№ точки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_k	0,2	0,3	0,5	0,7	0,85	0,92	1,1	1,2	1,35	1,45
y_k	5,9	6	6,1	6,5	6,3	6	5,8	5,4	5,2	5

Построим на листе Excel расчетную область (рис. 4). Для вычисления коэффициентов системы (17) запишем в ячейках B6:D7 соответственно формулы:

B6 → =СУММКВ(B2:K2);
C6 → =СУММ(B2:K2);
D6 → =СУММПРОИЗВ(B2:K2;B3:K3);
B7 → =СУММ(B2:K2);
C7 → 10;
D7 → =СУММ(B3:K3).

Далее в ячейках G6:H7 посчитаем обратную матрицу. Для этого выполним действия:

1) введем формулу в ячейку G6→ МОБР(B6:C7);
2) выделим диапазон для размещения обратной матрицы G6:H7;
3) установим курсор в строку формул и одновременно нажмем клавиши Ctrl, Shift, Enter.

Используя формулу (19), найдем умножая матрицы A^{-1} и B коэффициенты функции:

1) введем формулу в ячейку K6→ МУМНОЖ(G6:H7;D6:D7);
2) выделим диапазон для размещения результата K6:K7;
3) установим курсор в строку формул и одновременно нажмем клавиши Ctrl, Shift, Enter.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	№ точки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	xk	0,2	0,3	0,5	0,7	0,85	0,92	1,1	1,2	1,35	1,45
3	yk	5,9	6	6,1	6,5	6,3	6	5,8	5,4	5,2	5
4											
5		c1	c2								
6	1 ур-е	9,014	8,57	48,59		Aобр	0,599	-0,513		c1=	-0,774
7	2 ур-е	8,57	10	58,2			-0,513	0,54		c2=	6,483
8											
9	f(xk)	6,329	6,251	6,096	5,942	5,825	5,771	5,632	5,554	5,438	5,361
10	разность	0,429	0,251	0,004	0,558	0,475	0,229	0,168	0,154	0,238	0,361
11	delta=	0,104									
12	Применение функции ЛИНЕЙН()										
13		c1=	c2=								
14		-0,774	6,483								

Рис. 4. Расчетная область для вычисления коэффициентов функции $y = f(x) = c_1 x + c_2$

Теперь рассчитаем значения функции $y = f(x) = c_1 x + c_2$ в точках x_k, $k = \overline{1, n}$ и сравним их со значениями y_k, $k = \overline{1, n}$:

1) вводим формулу в ячейку B9 → = $K$6*B2+$K$7 и распространяем ее на диапазон B9:K9;

2) находим модуль разности значений $|f(x_k) - y_k|$, вводим формулу B10→ =ABS(B9-B3);

3) для вычисления погрешности воспользуемся формулой

$$\delta = \frac{1}{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(f(x_k) - y_k\right)^2}, \qquad (20)$$

которую запишем в ячейку B11→ =КОРЕНЬ(СУММКВ(B10:K10))/10.

Эту же задачу в Excel можно решить, используя функцию ЛИНЕЙН(значения y_k; значения x_k; конст; статистика), где аргументы «конст» и «статистика» являются логическими. Если «конст» равен ИСТИНА, то значение c_2 может выбираться любым. Если же «конст» – ЛОЖЬ, то $c_2 = 0$. Если «статистика» равен ЛОЖЬ или опущен, то вычисляются только параметры c_1 и c_2. В

противном случае производится подсчет дополнительных статистических пара метров, характеризующих линейный тренд, коэффициенты которого и являются результатом применения описываемой функции.

Проверим полученные расчеты:

1) введем B14→ =ЛИНЕЙН(B3:K3;B2:K2;ИСТИНА);
2) выделим диапазон для размещения коэффициентов B14:C14;
3) установим курсор в строку формул и одновременно нажмем клавиши Ctrl, Shift, Enter.

Сравним результаты в ячейках B14:C14 и K6:K7. Они совпадают.

Пример 2. Выберем теперь функцию $y = f(x)$ из класса квадратичных функций, то есть $y = f(x) = c_1x^2 + c_2x + c_3$. Используя формулу (15) получаем

$$F(x_k) = \sum_{k=1}^{n}\left(c_1x_k^2 + c_2x_k + c_3 - y_k\right)^2 \to \min . \qquad (21)$$

Как и ранее воспользуемся условием экстремума для определения коэффициентов. В результате получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3 = b_1; \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3 = b_2; \\ a_{31}c_1 + a_{32}c_2 + a_{33}c_3 = b_3, \end{cases} \qquad (22)$$

где $a_{11} = \sum_{k=1}^{n} x_k^4$; $a_{12} = a_{21} = \sum_{k=1}^{n} x_k^3$; $a_{13} = a_{22} = a_{31} = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$; $a_{23} = a_{32} = \sum_{k=1}^{n} x_k$; $b_1 = \sum_{k=1}^{n} y_k x_k^2$; $b_2 = \sum_{k=1}^{n} y_k x_k$; $b_3 = \sum_{k=1}^{n} y_k$.

Воспользуемся в качестве исходных данных табл. 1.

Построим в Excel расчетную область (рис. 5), где при перенесении табл. 1 учтем, что для расчета коэффициентов понадобится находить степени значений x_k. Поэтому добавим дополнительную строку «x_k^2».

Как и ранее, используя функции суммирования, найдем коэффициенты системы (22):

B7→ =СУММПРОИЗВ(B3:K3;B3:K3)
C7→ =СУММПРОИЗВ(B3:K3;B2:K2)
D7→ =СУММКВ(B2:K2)
E7→ =СУММПРОИЗВ(B3:K3;B4:K4)
B8→ =СУММПРОИЗВ(B3:K3;B2:K2)
C8→ =СУММКВ(B2:K2)
D8→ =СУММ(B2:K2)
E8→ =СУММПРОИЗВ(B4:K4;B2:K2)
B9→ =СУММКВ(B2:K2)
C9→ =СУММ(B2:K2)
D9→ =10
E9→ =СУММ(B4:K4)

В ячейках F7:H9 вычислим обратную матрицу МОБР(B7:C9), а затем, используя МУМНОЖ(F7:H9;D7:D9), коэффициенты функции $y = f(x)$.

Подсчитаем значения функции $y = f(x)$ в точках x_k, $k = \overline{1, n}$. Для этого введем формулу

B11→ =$K$7*B2^2+$K$8*B2+$K$9

и распространим ее на диапазон B11:K11.

Для вычисления погрешности воспользуемся формулой (20). Отметим, что квадратичная функция $y = f(x) = c_1x^2 + c_2x + c_3$ лучше приближает значения y_k, $k = \overline{1, n}$, чем линейная. Это следует из сравнения значений погрешности в ячейках B11 (рис. 4) и B13 (рис. 5).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	№ точки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	xk	0,2	0,3	0,5	0,7	0,85	0,92	1,1	1,2	1,35	1,45
3	xk^2	0,04	0,09	0,25	0,49	0,723	0,846	1,21	1,44	1,823	2,103
4	yk	5,9	6	6,1	6,5	6,3	6	5,8	5,4	5,2	5
5											
6		c1	c2	c3							
7	1 ур-е	12,830	10,464	9,014	49,900	Aобр=	4,721	-7,745	2,382	c1=	**-2,081**
8	2 ур-е	10,464	9,014	8,570	48,585		-7,745	13,306	-4,422	c2=	**2,641**
9	3 ур-е	9,014	8,570	10,000	58,200		2,382	-4,422	1,742	c3=	**5,433**
10											
11	f(xk)	5,878	6,038	6,233	6,262	6,174	6,101	5,819	5,605	5,205	4,886
12	разность	0,022	0,038	0,133	0,238	0,126	0,101	0,019	0,205	0,005	0,114
13	delta	0,03973									
14											
15		c1=	c2=	c3=							
16		**-2,081**	**2,641**	**5,433**							

Рис. 5. Расчетная область для вычисления коэффициентов функции $y = f(x) = c_1x^2 + c_2x + c_3$

Замечание. Для нахождения коэффициентов квадратичной функции $y = f(x) = c_1x^2 + c_2x + c_3$ также можно воспользоваться функцией ЛИНЕЙН. При этом ее параметры задаются следующим образом:

B16→=ЛИНЕЙН(B4:K4;B2:K3;ИСТИНА).

Параметры c_1, c_2 и c_3, полученные с ее помощью, не отличаются от параметров, полученных при решении системы (22).

Задание

Для набора точек (табл. 2) требуется подобрать линейную функцию $y = f(x) = c_1x + c_2$ и квадратичную функцию вида $y = f(x) = c_1x^2 + c_2x + c_3$. Сделать вывод о лучшем приближении значений y_k.

Таблица 2

№ вар	№ точки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	x_k	0,2	0,3	0,5	0,7	0,8	0,9	1,1	1,2	1,3	1,4
	y_k	3,9	5	6,1	6,5	6,3	6	4,8	5,4	5,2	6
2	x_k	2,5	2,7	2,9	3,0	3,3	3,5	3,8	4,1	4,4	5,2
	y_k	7,8	8	8,4	8,9	9,2	10	8,1	8,9	12,0	11,4
3	x_k	5,2	5,5	6	7	7,5	7,8	8,1	8,9	9	9,5
	y_k	20	19,5	19,1	19	18,2	18,9	18,1	17,8	17,7	18
4	x_k	1,1	1,9	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,3	3,5	3,8
	y_k	4,4	4,6	5,2	4,8	5,6	5,9	6	6,2	6,1	8
5	x_k	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3	3,3	3,7
	y_k	6,1	6,7	6,5	7	7,3	7,2	7,7	7,4	7,1	7,7
6	x_k	0,3	0,6	0,8	1	1,3	1,6	1,8	1,9	2,2	2,4
	y_k	3,5	3,8	4,5	5,2	5,9	6,5	7,1	7,3	8	9
7	x_k	1,5	1,8	2	2,2	2,5	3	3,3	3,7	4	4,5

	y_k	7	7,5	8	8,5	9	9,5	9	9,1	8,2	8,4
8	x_k	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
	y_k	12,2	13,5	14,8	15,6	16	16,9	17,7	18,6	19,8	22
9	x_k	3,2	3,4	3,6	3,8	4	4,2	4,4	4,6	4,8	5
	y_k	5,1	5,8	6,5	7,1	8	8,3	8,4	7	7,3	7,5
10	x_k	4,5	4,7	5	5,5	5,8	6,2	6,6	6,9	7,3	7,5
	y_k	10	10,9	12	13,4	14,7	14,8	14	13,9	13,5	13
11	x_k	2,5	2,7	2,9	3,0	3,3	3,5	3,8	4,1	4,4	5,2
	y_k	7	7,2	8	8,3	9	8,5	8,1	8,1	9,2	10
12	x_k	1,1	1,9	2,2	2,4	2,6	2,8	3	3,3	3,5	3,8
	y_k	6,1	6,7	6,5	7	7,3	7,2	7,7	7,9	8,1	7,7
13	x_k	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	2,4	2,7	3	3,3	3,7
	y_k	10	10,9	12	13,4	14,7	13,8	14	13,9	13,5	12
14	x_k	1,5	1,8	2	2,2	2,5	3	3,3	3,7	4	4,5
	y_k	12,2	13,5	14,8	15,6	16	16,9	17,7	18,6	19,8	22
15	x_k	0,3	0,6	0,8	1	1,3	1,6	1,8	1,9	2,2	2,4
	y_k	4,4	4,6	5,2	4,8	5,6	5,9	6	6,7	6,5	8

Лабораторная работа № 2. Приближенное вычисление интегралов

Краткая теория

Часто в практических целях требуется вычислять площади плоских фигур. При этом из-за произвольности границ области, занятой фигурой, процесс вычисления затрудняется. В некоторых случаях такую площадь можно найти только приближенно. Рассмотрим на примере.

Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $x=0$; $x=12$; $y=0$;

$$y=\begin{cases} 0,\ x\le 1; \\ \dfrac{x-1}{5},\ 1<x\le 6; \\ \dfrac{14-x}{8},\ 6<x\le 14; \\ 0,\ x>14. \end{cases}$$

Воспользуемся графиком, приведенным на рис. 1, где изображены функции $y=y(x)$, $x=a=0$, $y=b=12$ и $y=0$. Площадь искомой фигуры равна площади четырехугольника *ABCH* и легко вычисляется, если разрезать *ABCH* на части. В результате получаем:

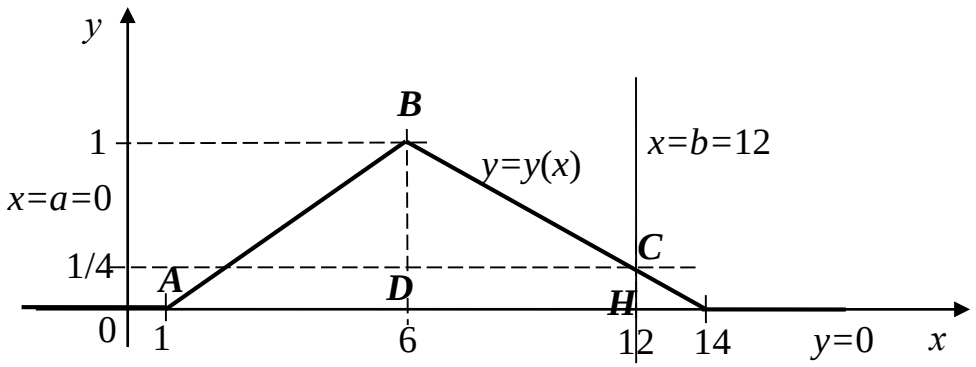


Рис. 1. График функции $y=f(x)$

$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 1=\dfrac{5}{2}$ – площадь прямоугольного треугольника *ABD*;

$S_2=\dfrac{1}{2}\cdot\left(1+\dfrac{1}{4}\right)\cdot(12-6)=\dfrac{15}{4}$ – площадь трапеции *BCHD*;

$S = S_1 + S_2 = \frac{5}{2} + \frac{15}{4} = \frac{25}{4} = 6,25$ – точное значение площади.

Организуем вычисление Excel:

1. Построим таблицу функции $y = y(x)$ для 11 точек: $n = 11$. Расстояние между точками $h = \frac{b-a}{n-1}$, так как при выборе 11 точки получается всего 10 интервалов на отрезке. Точки находятся по формулам:

$$x_1 = a = 0;\ x_k = x_{k-1} + h,\ k = \overline{2, 11}. \qquad (1)$$

2. Строим таблицу для 11 точек на отдельном листе (рис. 2.).

	A	B	C	D
1	*a* =	0		
2	*b* =	12		
3	n =	11		
4	*h* =	=(B2-B1)/(B3-1)		
5	№ точки	x	y	
6	1	=B1		
7	2	= B1+B$4		
…	…	…	…	
16	11			

Рис. 2. Вычисление площади фигуры

3. Согласно условию, функция задана как кусочно-постоянная формулой

$$y(x) = \begin{cases} 0,\ x \le 1; \\ \frac{x-1}{5},\ 1 < x \le 6; \\ \frac{14-x}{8},\ 6 < x \le 14; \\ 0,\ x > 14. \end{cases}$$

, поэтому для ее вычисления используем формулу:

C6 → =ЕСЛИ(B6<=0; 0; ЕСЛИ(И(B6>1; B6<=6); (B6–1)/5; ЕСЛИ(И(B6>6; B6<=14); (14–B6)/8; 0))).

4. Проверим правильность вычисления функции, построив ее график на отрезке $[0, 12]$.

Заметим, что полученный график не очень похож на точный график. Это связано с выбором значения *n*. Понятно, что чем большее число точек на отрезке взять, тем точнее получается график. Добавим в области построения основные и промежуточные линии сетки по оси *Ox*. Тогда, используя эти линии, можно увидеть, что искомая площадь разрезается линиями $x = x_i$, $i = \overline{1, n}$ на отдельные трапеции (рис. 3). При этом каждая *i*-я трапеция имеет высоту, равную *h*, и два основания y_i и y_{i+1}.

5. Для подсчета площади фигуры воспользуемся формулой

$$S = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta S_i,$$

где $\Delta S_i = \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1})(x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{2}(y_i + y_{i+1})h_i$ – площадь *i*-й трапеции, $i = \overline{1, n-1}$. Всего трапеций столько, сколько интервалов на отрезке $[a, b]$.

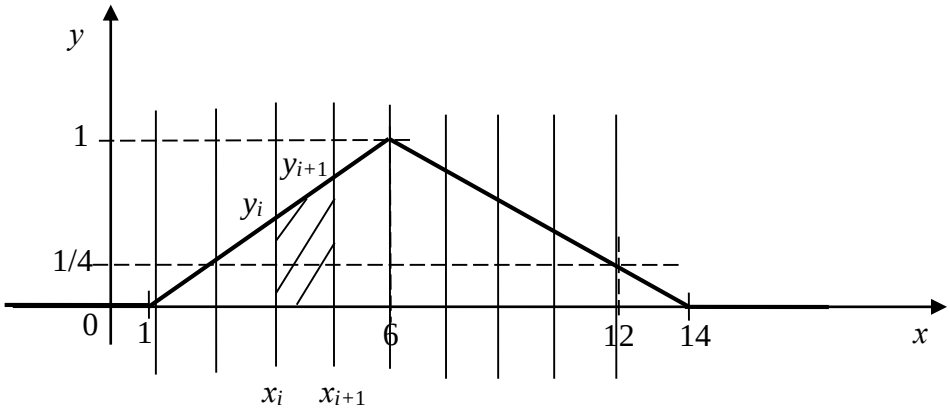


Рис. 3. Разрезание исходной фигуры вертикальными линиями $x = x_i$

6. Вводим формулу D6 → = (C6+C7)*B$4/2. Распространяем ее на ячейки D6:D15.

Подсчитаем площадь: D16 → = СУММ(D6:D15). Получаем 6,21.

Заметим, полученное значение площади приблизительно равно точному. Следует отметить, что чем больше точек берется на отрезке $[a, b]$, тем точнее получается результат вычисления.

Замечание. Выполненные вычисления соответствует приближенному вычислению определенного интеграла:

$$S = \int_a^b y(x)\,dx.$$

Метод, который использовался при вычислении площади, называется **метод трапеций**. Его общая формула имеет вид:

$$S = \int_a^b y(x)\,dx = \frac{b-a}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{y_k + y_{k+1}}{2}, \qquad (2)$$

где $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{1, n}$; $x_1 = a$, $x_k = x_{k-1} + h$, $k = \overline{1, n}$; $h = \dfrac{b-a}{n-1}$.

Учитывая выражение под суммой в формуле (2), ее можно записать следующим образом:

$$S = \int_a^b \frac{\sqrt{x+1}}{2}\,dx = \frac{b-a}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{y_k + y_{k+1}}{2} = h\left(\frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_2 + y_3}{2} + \ldots + \frac{y_{n-2} + y_{n-1}}{2} + \right.$$

$$\left. + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\right) = h\left(\frac{y_1}{2} + y_2 + y_3 + \ldots + y_{n-2} + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right).$$

Существуют и другие методы вычисления определенных интегралов и площадей плоских фигур.

Метод прямоугольников предполагает вычисление интеграла по формуле (рис. 4):

$$S = \int_a^b y(x)\,dx = \frac{b-a}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} y_k = hy_1 + hy_2 + \ldots + hy_{n-1} = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \ldots + \Delta S_{n-1}, \qquad (3)$$

или по формуле (рис. 5)

$$S = \int_a^b y(x)\,dx = \frac{b-a}{n-1}\sum_{k=2}^{n} y_k = hy_2 + hy_3 + \ldots + hy_n = \Delta S_2 + \Delta S_3 + \ldots + \Delta S_n, \qquad (4)$$

где $\Delta S_i = hy_i$ – это площадь прямоугольника, который является частью искомой площади.

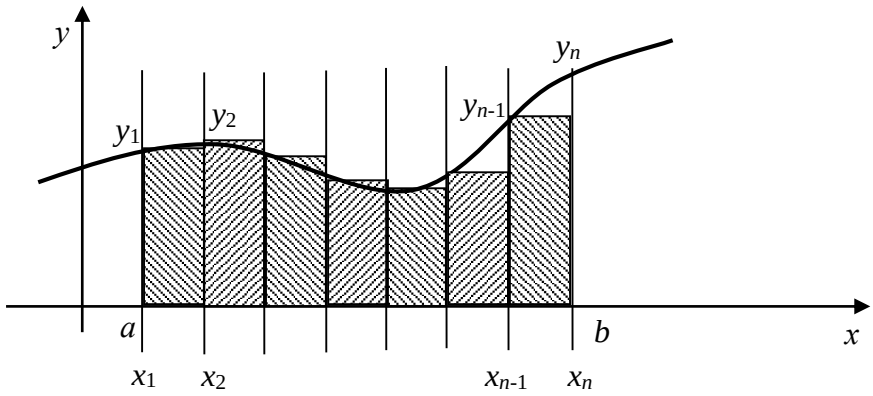


Рис. 4. Иллюстрация приближенного вычисления площади фигуры по формуле (3)

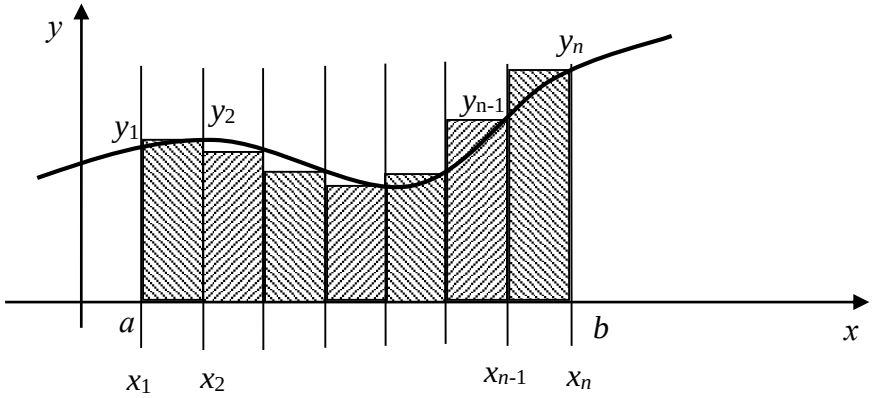


Рис. 5. Иллюстрация приближенного вычисления площади фигуры по формуле (4)

Рассматривая рис. 4 и 5, замечаем, что вычисление площади плоской фигуры, ограниченной линиями $x=a$; $x=b$; $y=0$, $y=y(x)$, тоже не дает точного значения. Однако, записанные формулы также можно использовать при оценке площади. И здесь, как и в случае применения формулы трапеций, будет верен вывод о том, что точность вычисления тем больше, чем больше берется точек на отрезке $[a, b]$.

Метод Симпсона предполагает вычисление площади (или определенного интеграла) по формуле

$$S=\int_a^b y(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}\Big[(y_0+y_{2n})+2(y_2+y_4+...+y_{2n-2})+ \\ +4(y_3+y_5+...+y_{2n-1})\Big], \qquad (5)$$

где на отрезке $[a, b]$ выбирают точки x_0, x_1, x_2, …, x_{2n-1}, x_{2n}.

В методе Симпсона необходимо брать нечетное число точек $m=2n+1$ на отрезке $[a, b]$ и четное число интервалов *m*-1.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_0^5 \frac{\sqrt{x+1}}{2}dx$, используя формулы трапеций, прямоугольников и Симпсона.

Подготовим таблицу значений функции (рис. 6), выбирая $m=21$ точку на отрезке. Точки пронумеруем от 0 до 20. Вычислим координаты точек x_k, используя формулы (1), и значение функции $y_k=0{,}5\sqrt{x_k+1}$, $k=\overline{0,\ 20}$. В соответствие с этим на листе Excel запишем формулы:

D2→ =(B2-B1)/(D1-1);

B5→ =B1;

B6→ =B5+$D$2. Эту формулу распространяем на диапазон B6:B24, чтобы получить значения точек x_k;

C4→ =КОРЕНЬ(B4+1)/2. Эту формулу распространяем на диапазон C5:C24, чтобы получить значения точек y_k.

В столбце *D* посчитаем значение интеграла, используя формулу трапеций, в столбце *E* – формулу прямоугольников (3), в столбце *F* – формулу прямоугольников (4), в столбце *G* – формулу Симпсона.

Разберем подробно процесс вычисления по каждой из формул:

1. Для столбца *D* использовалась формула трапеций (2) в виде

$$S = \int_0^5 \frac{\sqrt{x+1}}{2} dx = h\left(\frac{y_0 + y_m}{2}\right) + h\sum_{k=1}^{m-1} y_k .$$

Сначала переместим в столбец D значения функции y_k: D4→ =C4. Формулу распространяем на диапазон C5:C24. Теперь в ячейке D25 записываем формулу для вычисления интеграла

D25→ =D2*(0,5*(D4+D24)+СУММ(D5:D23)).

2. В столбце *E* интеграл вычислялся по формуле прямоугольников (4), поэтому сначала сформируем нужные произведения:

E4→ =D4*$D$2,

а затем в ячейке E25 подсчитаем значение интеграла

E25→ =СУММ(E4:E24).

Заметим, что при этом ячейка E24 остается пустой, что соответствует значению ноль в данном случае.

3. В столбце *F* интеграл вычислялся по формуле прямоугольников (4), поэтому сначала сформируем нужные произведения:

F5→ =D5*$D$2,

а затем в ячейке E25 подсчитаем значение интеграла

F25→ =СУММ(F4:F24).

	A	B	C	D	E	F	G
1	*a* =	0	*m*=	21			
2	*b* =	5	*h*=	0,25			
3	№ точки	*x*	*y*	Метод трапеций	Метод прямоугольников по формуле (3)	Метод прямоугольников по формуле (4)	Метод Симпсона
4	0	0	0,500	0,500	0,125		0,500
5	1	0,25	0,559	0,559	0,140	0,140	2,236
6	2	0,5	0,612	0,612	0,153	0,153	1,225
7	3	0,75	0,661	0,661	0,165	0,165	2,646
8	4	1	0,707	0,707	0,177	0,177	1,414
9	5	1,25	0,750	0,750	0,188	0,188	3,000
10	6	1,5	0,791	0,791	0,198	0,198	1,581
11	7	1,75	0,829	0,829	0,207	0,207	3,317
12	8	2	0,866	0,866	0,217	0,217	1,732
13	9	2,25	0,901	0,901	0,225	0,225	3,606
14	10	2,5	0,935	0,935	0,234	0,234	1,871
15	11	2,75	0,968	0,968	0,242	0,242	3,873

16	12	3	1,000	1,000	0,250	0,250	2,000
17	13	3,25	1,031	1,031	0,258	0,258	4,123
18	14	3,5	1,061	1,061	0,265	0,265	2,121
19	15	3,75	1,090	1,090	0,272	0,272	4,359
20	16	4	1,118	1,118	0,280	0,280	2,236
21	17	4,25	1,146	1,146	0,286	0,286	4,583
22	18	4,5	1,173	1,173	0,293	0,293	2,345
23	19	4,75	1,199	1,199	0,300	0,300	4,796
24	20	5	1,225	1,225		0,306	1,225
25			**S=**	**4,565**	**4,474**	**4,655**	**4,566**

Рис. 6. Вычисление интеграла с использованием разных квадратурных формул

Заметим, что при этом ячейка F4 остается пустой, что соответствует значению ноль в данном случае.

4. В столбце *G* интеграл вычисляется по формуле Симпсона (5). При этом следует помнить, что заданное число точек *m* на отрезке $[0;\,5]$ и число *n* в формуле (5) связаны соотношением $m = 2n + 1$, поэтому для определения *n* воспользуемся формулой целочисленного деления $n = \left[\dfrac{m}{2}\right]$, что соответствует в Excel формуле ЦЕЛОЕ(D1/2).

Далее, согласно формуле Симпсона значения функции в точках с четными номерами должны быть умножены на 2, а с нечетными на 4, поэтому используем формулу

G5→ =ЕСЛИ(ОСТАТ(A5;2)=0;2*C5;4*C5),

которую распространяем на диапазон G6: G23.

Окончательно для вычисления значения интеграла, получаем

G25→ =(B2-B1)/(6*ЦЕЛОЕ(D1/2))*(G4+G24+СУММ(G5:G23)).

Сравним все полученные результаты (рис. 6) с точным значением

$$\int_0^5 \frac{\sqrt{x+1}}{2}dx = \frac{1}{3}(x+1)^{3/2}\Big|_0^5 = \frac{1}{3}\left(6^{3/2} - 1\right) = 4{,}5656.$$

Следует отметить, что точнее всего значение получилось по методу Симпсона.

Задание

Вычислить интеграл, используя формулы трапеций, прямоугольников и Симпсона.

№		**№**	
1	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$	**9**	$\int_0^1 (x^3 + 3x + 2)dx$
2	$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^6}$	**10**	$\int_1^4 \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{\sqrt{x}}dx$
3	$\int_0^4 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}dx$	**11**	$\int_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}$

4	$\int\limits_0^1 \frac{xdx}{1+x^2}$	**12**	$\int\limits_4^{11} \frac{\sqrt{x+5}}{6}dx$
5	$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$	**13**	$\int\limits_0^1 \left(x^3+x\sqrt{x}\right)dx$
6	$\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{1+x^2}$	**14**	$\int\limits_1^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}dx$
7	$\int\limits_1^6 \sqrt{x+3}dx$	**15**	$\int\limits_1^2 \frac{x^2+x+1}{x}dx$
8	$\int\limits_1^4 \left(\sqrt{x}+4\right)^2dx$	**16**	$\int\limits_0^1 (3x+1)^4dx$

Лабораторная работа № 3. Обыкновенные дифференциальные уравнения и их системы

Краткая теория

Для описания динамических систем используются обыкновенные дифференциальные уравнения (ОДУ), включающие переменную состояния $x = x(t)$ рассматриваемого объекта и производные от нее:

$$F\left(t,\ x(t),\ x'(t),\ ...,\ x^{(n)}(t)\right) = 0,$$

где $F\left(t,\ x,\ x',\ ...,\ x^{(n)}\right)$ – заданная функция; $x^{(k)}(t)$ – производная k-го порядка.

К уравнениям такого типа относятся линейные ОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами:

$$x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + ... + a_{n-1}x' + a_nx = f(t), \qquad (1)$$

где $a_1, a_2, ..., a_n$ – постоянные числа; $f(t)$ – заданная функция.

Уравнение вида

$$x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + ... + a_{n-1}x' + a_nx = 0 \qquad (2)$$

называется **однородным**.

Можно показать, что решение неоднородного ОДУ (1) можно представить в виде

$$x(t) = x_0(t) + \hat{x}(t),$$

где $x_0(t)$ – решение однородного уравнения (2); $\hat{x}(t)$ – любое частное решение неоднородного уравнения (1).

Динамические объекты могут также описываться системами ОДУ вида

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ x_2' = f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n), \\ ... \\ x_n' = f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n). \end{cases} \tag{3}$$

Система (3) называется **нормальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений**.

Нормальная система ОДУ называется **линейной**, если функции $f_1, f_2, ..., f_n$ являются линейными относительно неизвестных. Такую линейную систему можно представить в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + b_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + b_2, \\ ... \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + b_n, \end{cases} \tag{4}$$

где все коэффициенты a_{ik}, $i, k = \overline{1, n}$, а также b_i, $i = \overline{1, n}$ вообще говоря, являются произвольными функциями от t. Если все величины a_{ik}, b_i постоянны, то такая система называется **линейной системой ОДУ** с постоянными коэффициентами.

Обозначим

$$\bar{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ ... \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \frac{d\bar{x}}{dt} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ ... \\ x_n' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тогда систему ОДУ (4) можно записать в матричном виде

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} + B.$$

Численное решение дифференциальных уравнений

Рассмотрим ОДУ I порядка

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \tag{5}$$

где $x = x(t)$ – неизвестная, а $f(x, t)$ – заданная функция. Пусть функция $x = x(t)$, при $t = t_0$ известна, т.е.

$$x(t_0) = x_0, \tag{6}$$

и требуется найти решение уравнения (5) при условии (6) так, что $t : t > t_0$.

Задача нахождения решения ОДУ (5) при условии (6) называется, **задачей Коши.**

Если $f(x, t)$ линейная по x функция, то есть, $f(x, t) = ax(t) + F(t)$, то уравнение $\dfrac{dx}{dt} = ax + F(t)$ называется **линейным ОДУ I порядка**.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений I порядка

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m,\ t),$$
$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1,\ x_2,\ ...,x_m,\ t), \qquad (7)$$
$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n,\ t)$$

где $x_k = x_k(t),\ k = \overline{1,\ n}$, $f_k = f_k(x_1, x_2, x_n,\ t),\ k = \overline{1,\ n}$ – известные функции.

Если начальные значения функций $x_k(t),\ k = \overline{1,\ n}$ при $t = t_0$ известны

$$x_k(t_0) = x_{k0},\ k = \overline{1,\ n}, \qquad (8)$$

то задача нахождения решения (7) при условиях (8), называется **задачей Коши.**

Введем в рассмотрение наборы неизвестных функций $\bar{x} = \bar{x}(t)$, функции $\bar{f} = \bar{f}(\bar{x},\ t),\ \ \bar{F} = \bar{F}(t)$ вида

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ ..... \\ x_n(t) \end{pmatrix};\quad \bar{f}(\bar{x},\ t) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x},\ t) \\ f_2(\bar{x},\ t) \\ ..... \\ f_n(\bar{x},\ t) \end{pmatrix};\quad \bar{F}(t) = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ ..... \\ F_n(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда систему ОДУ (7) можно записать в виде

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{f}(\bar{x},\ t). \qquad (9)$$

Для решения ОДУ и их систем используются различные численные процедуры (методы, схемы). Рассмотрим некоторые из них на примере уравнений (5), (9), не различая их, так как уравнение (5) получается из систем (7) при n=1. Используемые подходы к численному решению ОДУ, отличаются тем, что линейное приближенное значение производной $\frac{d\bar{x}}{dt}$ можно трактовать по-разному (как значение в левой, правой и средней точке), а также тем, что для аппроксимации функции $x(t)$ и последующего вычисления ее производной можно использовать различные шаблоны (трехточечные, пятиточечные и т.д.). Во всех случаях будем считать, что значение $x(t_0) = x_0$ задано.

Рассмотрим уравнение (5). Введем набор точек $t_1, t_2, ..., t_k$ на оси Ot так, что $t_1 = t_0 + h;\ \ t_2 = t_1 + h;\ t_k = t_{k-1} + h;\ \ h = t_k - t_{k-1}$. Рассмотрим следующие разностные схемы приближенного решения системы ОДУ:

1. Явная схема Эйлера

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{h} = f(x_k,\ t_k); \qquad (10)$$
$$x_{k+1} = x_k + h\, f(x_k,\ t_k). \qquad (11)$$

В схеме (10) значение производной, найденной приближенно, принимается равным значению в левой точке t_k отрезка $[t_{k-1};\ t_{k+1}]$. Схема (10) явная, так как решение в точках $t_k,\ k = 1,2$ явно выражается через решение предыдущей точки с помощью формулы (11).

2. Неявная схема Эйлера

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{h} = f(x_{k+1},\ t_{k+1}). \qquad (12)$$

В разностной схеме (12) значение конечной разности принимается равным значению производной в правой точке t_{k+1} отрезка $[t_k;\ t_{k+1}]$. Из формулы (12) получаем:

$$x_{k+1} = x_k + h\, f(x_{k+1},\ t_{k+1}). \qquad (13)$$

Таким образом, нахождение x_{k+1} на каждом шаге требует решения нелинейного уравнения (13).

3. Схема с центральными разностями

$$\frac{x_{k+1}-x_{k-1}}{h}=f(x_k,\,t_k)\,. \qquad (14)$$

Здесь конечной разности придается смысл производной в точке t_k отрезка $[t_{k-1};t_{k+1}]$. Получаем

$$x_{k+1}=x_{k-1}+h\,f(x_k,\,t_k)\,. \qquad (15)$$

Для применения схемы (15) необходимо задать дополнительно значения x_1 в точке t_1. Это можно сделать с помощью схемы (15), полагая, что $x_1=x_0+h\,f(x_0,\,t_0)$, а далее использовать схему (15).

4. Метод Эйлера-Коши

$$\frac{x_{k+1}-x_k}{h}=\frac{1}{2}\Big(f(x_k,\,t_k)+f(x^*_{k+1},\;t_{k+1})\Big), \qquad (16)$$

где

$$x_{k+1}=x_k+h\,f(x_k,\,t_k)\,. \qquad (17)$$

Заметим, что в схеме (16) x^*_{k+1} находится с использованием явной схемы Эйлера (10). При этом схема (16) является явной, так как на каждом шаге

$$x_{k+1}=x_k+\frac{h}{2}\Big(f(x_k,\,t_k)+f(x^*_{k+1},\;t_{k+1})\Big),\quad k=0,\,1,\,2,\ldots. \qquad (18)$$

Заметим, схемы решения систем ОДУ получаются из равенств (10); (18) путем замены x на $\bar{x}$, f на $\bar{f}$ и применением этих схем для каждого уравнения системы.

Примеры решения дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений методом Эйлера в Excel

Метод Эйлера используется для численного интегрирования дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} y'=f(x,\,y); \\ y(x_0)=y_0, \end{cases} \qquad (19)$$

где y_0 – заданное значение искомой функции в точке x_0.

Выберем шаг h и построим систему равностоящих узлов $x_k=x_0+kh$, $k=1,\,2,\,3,\ldots$ Пусть $y_k=y(x_k)$ – значение искомой функции в k-й точке (узле). Для дифференциального уравнения (19), используя приближенные формулы вычисления производной первого порядка, получаем две разностные схемы:

1) явная разностная схема

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{h}=f(x_k,\,y_k),\;k=0,\,1,\,2,\ldots; \qquad (20)$$

2) неявная разностная схема

$$\frac{y_{k+1}-y_k}{h}=f(x_k,\,y_{k+1}),\;k=0,\,1,\,2,\ldots. \qquad (21)$$

В результате согласно методу Эйлера приближенные значения неизвестной функции $y=y(x)$ вычисляются соответственно по формулам:

1) явная разностная схема

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k),\ k = 0, 1, 2, ...; \qquad (22)$$

2) неявная разностная схема

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_{k+1}),\ k = 0, 1, 2, ... \qquad (23)$$

При этом при использовании неявной разностной схемы для вычисления y_{k+1} требуется решать, вообще говоря, нелинейное уравнение. При численном интегрировании можно использовать любую из разностных схем.

Пример 1. Решить дифференциальное уравнение

$$\begin{cases} y' = x + y; \\ y(0) = 4. \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся явной схемой (22), тогда

$$y_{k+1} = y_k + h(x_k + y_k),\ k = 0, 1, 2, ...,$$

где $x_0 = 0$, а $x_k = x_0 + hk$; $y_0 = 0$. Выберем $h = 0{,}05$.

Построим на листе Excel расчетную схему (рис. 1). Для определения точек x_k и значений функции y_k введем формулы:

B5→ =B1;
B6→ =B5+$B$3;
C5→ =B2;
C6→ =C5+$B$3*(B5+C5),

И распространим их вниз на нужное число ячеек. В данном случае на рис. 1 расчет показан для 10 точек.

	A	B	C	D	E
1	x0=	0			
2	y0=	4			
3	h=	0,05			
4	Точки	*xk*	Явная схема *yk*	Точное решение	Неявная схема *yk*
5	0	0	4,000	4,000	4,000
6	1	0,05	4,200	4,206	4,211
7	2	0,1	4,413	4,426	4,435
8	3	0,15	4,638	4,659	4,673
9	4	0,2	4,878	4,907	4,927
10	5	0,25	5,131	5,170	5,197
11	6	0,3	5,400	5,449	5,484
12	7	0,35	5,686	5,745	5,788
13	8	0,4	5,987	6,059	6,111
14	9	0,45	6,307	6,392	6,454
15	10	0,5	6,644	6,744	6,817

Рис. 1. Решение дифференциального уравнения

Воспользуемся точным решением данной задачи $y(x) = 5e^x - x - 1$, чтобы сравнить точность вычислений. Сравнивая значения в столбце для расчета y_k и точное решение (рис. 1), можно сделать вывод о хорошем совпадении значений. Вычисляя погрешность решения по формуле:

$$\Delta y = \max_{k=1,\,2,\ldots} |y_k - y(x_k)|, \qquad (24)$$

получаем, что для явной разностной схемы погрешность $\Delta y_1 = 0{,}099$.

Воспользуемся теперь неявной схемой (23), тогда

$$y_{k+1} = y_k + h(x_k + y_{k+1}),\ k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где по-прежнему $x_0 = 0$, а $x_k = x_0 + 0{,}05k$; $y_0 = 0$. Тогда для вычисления y_{k+1} получаем

$$y_{k+1} = \frac{y_k + hx_k}{1-h},\ k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{25}$$

Вычисления по формуле (25) представлены на рис. 1. Погрешность решения, подсчитанная по формуле (24), равна $\Delta y_2 = 0{,}074$. Таким образом, применение неявной схемы Эйлера позволило получить более точное решение.

Метод Эйлера также может быть применен для решения дифференциальных уравнений более высокого порядка. В этом случае, используя дополнительные переменные, исходное уравнение сводят к системе дифференциальных уравнений. Рассмотрим более подробно этот процесс на примере дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'); \\ y(x_0) = y_0; \\ y'(x_0) = y'_0, \end{cases} \tag{26}$$

где y_0 и y'_0 заданные значения функции и первой производной функции.

Введем обозначение $z(x) = y'(x)$, тогда $z'(x) = y''(x)$ и тогда задача (26) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} z' = f(x, y, z); \\ y(x_0) = y_0; \\ z(x_0) = y'_0. \end{cases} \tag{27}$$

Точно так же, как и в предыдущем случае, рассмотрим явную и неявную разностные схемы, которые используют для численного решения задачи (27). Задаем множество узлов x_0, $x_k = x_0 + hk$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, тогда $y_k = y(x_k)$, $z_k = z(x_k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Получаем явную разностную схему в виде:

$$\begin{aligned} &\frac{z_{k+1} - z_k}{h} = f(x_k, y_k, z_k); \\ &\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = z_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{28}$$

где y_0 и z_0 заданы по условиям задачи (27). После преобразования формулы (28) имеют вид:

$$z_{k+1} = z_k + hf(x_k, y_k, z_k);$$
$$y_{k+1} = y_k + hz_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Для неявной разностной схемы получаем

$$\begin{aligned} &\frac{z_{k+1} - z_k}{h} = f(x_k, y_{k+1}, z_{k+1}); \\ &\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = z_{k+1},\ k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{29}$$

Тогда для ведения расчетов имеем

$$\begin{aligned} &z_{k+1} = z_k + hf(x_k, y_{k+1}, z_{k+1}); \\ &y_{k+1} = y_k + hz_{k+1},\ k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{30}$$

Разрешить последнюю систему уравнений относительно z_{k+1} и y_{k+1} не всегда удается просто. Если функция $f(x, y, y')$ в задаче (26) нелинейная, то здесь могут потребоваться методы решения нелинейных уравнений.

Пример 2. Найти решение уравнения $y'' = x + y' + 2y$ при условиях, что $y'(0) = 0{,}5$; $y(0) = 1$.

Зададим шаг $h = 0{,}04$ и систему точек $x_0 = 0$, $x_k = x_0 + 0{,}04k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Пусть $z(x) = y'(x)$, тогда задача имеет вид

$$\begin{cases} z' = x + z + 2y; \\ y' = z; \\ z(0) = 0{,}5,\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Используя явную разностную схему, получаем

$$z_{k+1} = z_k + 0{,}04(x_k + 2y_k + z_k);$$

$$y_{k+1} = y_k + 0{,}04z_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Построим расчетную схему на листе Excel (рис. 2).

	A	B	C	D	E
1	h=	0,04			
2	y(0)=	1			
3	z(0)=	0,5			
4	Точки	*xk*	*yk*	*zk*	Точное решение
5	0	0	1,000	0,500	1,000
6	1	0,04	1,020	0,600	1,022
7	2	0,08	1,044	0,707	1,047
8	3	0,12	1,072	0,822	1,076
9	4	0,16	1,105	0,946	1,109
10	5	0,2	1,143	1,078	1,146
11	6	0,24	1,186	1,221	1,188
12	7	0,28	1,235	1,374	1,235
13	8	0,32	1,290	1,539	1,288
14	9	0,36	1,352	1,717	1,347
15	10	0,4	1,420	1,908	1,413

Рис. 2. Решение дифференциального уравнения второго порядка

Используя точное аналитическое решение рассматриваемого уравнения

$$y(x) = 0{,}5\left(e^{2x} - x + 1\right),$$

сравним полученные значения в столбцах «*yk*» и «Точное решение». Оценим погрешность вычислений, используя формулу (24), тогда $\Delta y = 0{,}007$. Следует отметить, что полученное решение и точное решение в заданных точках приближенно равны.

Задание.

Найти решение задачи Коши:

№	Уравнение	$y(0)$	$y'(0)$
1	$y'' - 5y' + 6y = 2x$	0	5
2	$y'' + 2y' + 5y = x + 5$	3	1

3	$y'' + y = 5x$	4	-2
4	$y'' + y' = 2x$	3	2
5	$y'' + 9y' = 10$	1	9
6	$y'' - y = x$	1	3
7	$y'' - 4y' + 4y = 3$	2	4
8	$y'' - y' = 6x + 1$	3	5
9	$y'' + 8y' + 16y = 9x + 1$	1	0
10	$y'' - 7y' + 6y = 3x + 2$	6	1
11	$y'' - 2y' = 3y + x$	3	1
12	$y'' - 4y' = 4x - 13y$	6	0
13	$y'' = 2y' - y + 5x$	2	-1
14	$y'' + 7y = x + 8y'$	-1	5
15	$y'' - y = x + 1$	4	2
16	$y'' + 10y = 2y' + x$	2	8

Лабораторная работа № 4. Решение задач линейной оптимизации

Краткая теория

Задача оптимизации предполагает нахождение наилучшего (оптимального) решения в заданных условиях. Общая постановка задачи имеет вид:

$$z = f(x) \to \max(\min);$$

$$g_i(x) = 0,\ i = \overline{1, l}; \qquad (1)$$

$$g_i(x) \geq 0,\ i = \overline{l+1, m},$$

где $z = f(x)$ называется целевой функцией; условия $g_i(x) = 0,\ i = \overline{1, l}$ и $g_i(x) \geq 0,\ i = \overline{l+1, m}$ – условиями ограничениями; переменная x может рассматриваться как простая переменная или как вектор вида $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Множество точек x, для которых выполняются условия ограничения, обычно обозначают Ω и называют **областью допустимых решений**.

Если все функции задачи (1) линейные, то задача называется задачей линейной оптимизации или линейного программирования. В этом случае задача имеет следующую формулировку: найти значения n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, при которых достигается минимум (или максимум) линейной функции вида

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \,, \qquad (2)$$

при условии, что эти переменные удовлетворяют системе линейных неравенств (возможно равенств):

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1; \\ &... \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m; \end{aligned} \qquad (3)$$

$$x_j > 0, \ j = \overline{1, n}, \qquad (4)$$

где $c_j, a_j, b_j \in R$.

Пример. Предприятие производит две модели мебели (*A* и *B*). Объем их производства ограничен запасами сырья и допустимым временем работы оборудования. Для производства модели *A* требуется в среднем, с учетом брака, 3 м^3 дерева, а для модели *B* – 4 м^3. Предприятие получает от поставщиков еженедельно 1700 м^3 доски. Для изготовления модели *A* требуется 12 мин машинного времени, а модели *B* – 30 мин. Имеется ограничение на используемое машинное время, связанное с ограниченным числом имеющихся станков. В неделю можно использовать не более 160 ч машинного времени. Сколько изделий каждого вида следует выпускать предприятию в неделю, если каждое изделие модели *A* приносит 2 ден.ед. прибыли, а модели *B* – 4 ден.ед.?

Решение. Сформулируем задачу планирования как оптимизационную. Пусть *x* количество изделий первого типа, *y* – количество изделий второго типа, выпускаемых в течение недели.

Прибыль от реализации этих изделий составляет (2*x*+4*y*). Эту прибыль необходимо максимизировать, что формально записывается в виде

$$z = 2x + 4y \to \max.$$

Запишем ограничения, связанные с ресурсами, используемыми в производстве:

– ограничение по запасам досок: $3x + 4y \le 1700$;

– ограничение по затратам машинного времени: $0{,}2x + 0{,}5y \le 160$;

– количество продукции должно быть неотрицательным: $x \ge 0, \ y \ge 0$.

Сформируем расчетную область задачи (рис. 1) на листе Excel.

	A	***B***	***C***
1	изделие *A*	0	

2	изделие *B*	0	
3	прибыль	0	
4	материал	0	← $3x+4y<=1700$
5	время	0	← $0{,}2x+0{,}5y<=160$

Рис. 1. Оформление вычислительной области

В ячейки B1 и B2 размещаем значения выпускаемой продукции x и y. Первоначально вводим B1→0 и B2→0, что соответствует условию (4).

В ячейку B4, B7 и B8 вводятся формулы:

– для расчета прибыли: B4→ =2*B1+4*B2, что соответствует формуле вычисления целевой функции;

– для проверки ограничения по запасам досок: B7→ =3*B1+4*B2;

– для проверки ограничение по использованию машиночасов:

B8→ =0,2*B1+0,5*B2,

где *B*1 и *B*2 – ссылки на ячейки, в которых заданы значения *x* и *y*.

Далее устанавливаем курсор на ячейку B4 и нажимаем кнопку «Поиск решения» на вкладке «Данные». При этом ссылка на ячейку, в которой записана формула для вычисления целевой функции, устанавливается автоматически.

В окне «Поиск решения» заполняются следующие поля (рис. 2):

1. Указывается флажок «Равной максимальному значению».

2. В поле «Изменяя ячейки» указываются ссылки, в которых фиксируются искомые значения B1:B2.

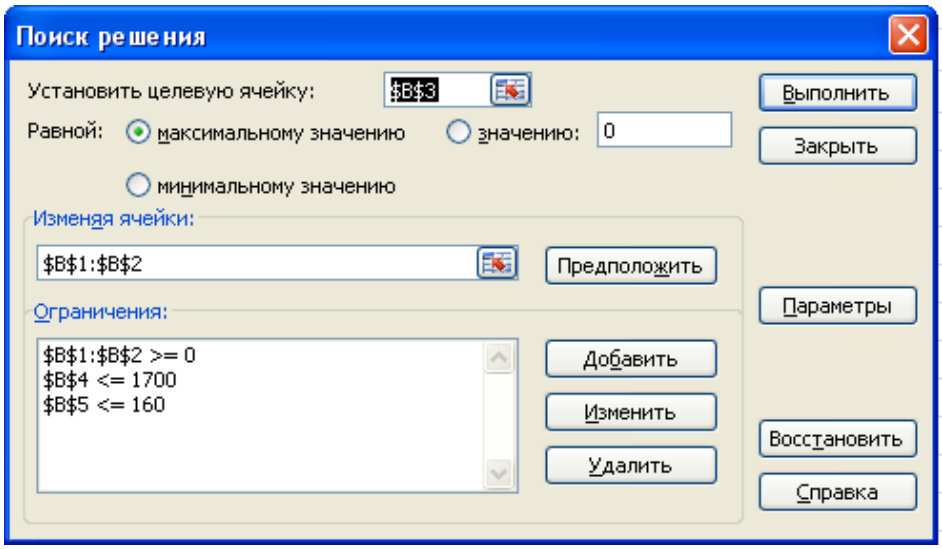


Рис. 2. Описание задачи в пакете Поиск решения

3. В поле «Ограничения:» вводятся все ограничения, содержащиеся в математической формулировке задачи. Каждое из них вводится с помощью кнопки «Добавить». Например, для

ввода первого ограничения на материалы в окне «Добавить ограничения» в поле «Ссылка на ячейку» вводится B7, выбирается тип ограничения $\leq$ и вводится в поле «Ограничения:» значение 1700. Аналогично задается ограничение на время.

Кроме этого вводим ограничения на значения (4): $B$1:$B$2>=0.

После нажатия кнопки «Выполнить» пакет «Поиск решения» выполняет расчет и выводит на экран окно «Результаты поиска решения», где выберем «сохранить результаты поиска решения».

Полученные результаты: $x = 300$; $y = 200$ (записаны в ячейках B1:B2). Найденная максимальная прибыль 1400 (ячейка B4).

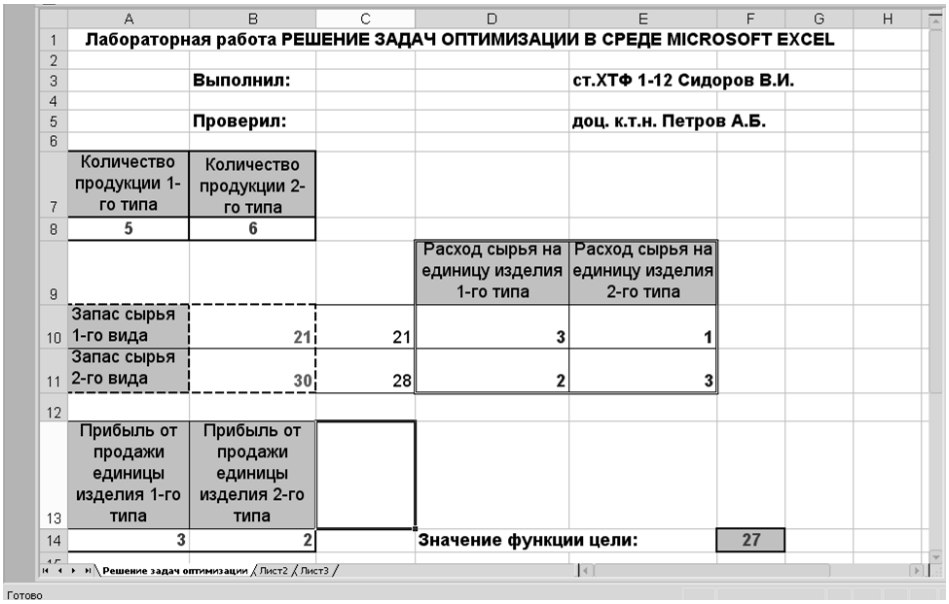
Пример выполнения работы

Требуется: решить задачу оптимизации, сформулированную в приведенной выше математической постановке.

Для этого необходимо выполнить следующие действия:

1. В ячейки A7 и B7 (в дальнейшем значения этих ячеек будут подобраны автоматически) введите текст «Количество продукции 1-го и 2-го типов».
2. В ячейки A8 и B8 заносятся нули - в дальнейшем значения этих ячеек будут подобраны автоматически.
3. В ячейки D9 и E9 запишите «Расход сырья на единицу изделия 1-го и 2-го типа».
4. В ячейки A10, A11 запишите «Запас сырья 1-го и 2-го видов».
5. В ячейки B10, B11 занесите запас сырья – 21 и 30 соответственно.
6. В ячейки диапазона D10:E11 размещаются значения расхода сырья.
7. В ячейках C10:C11 нужно указать формулы для расчета расхода сырья по типам изделий. В ячейке C10 формула будет иметь вид:

$$=\$A\$8*D10+\$B\$8*E10.$$



	A	B	C	D	E	F
1	Лабораторная работа РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ В СРЕДЕ MICROSOFT EXCEL					
3		Выполнил:			ст.ХТФ 1-12 Сидоров В.И.	
5		Проверил:			доц. к.т.н. Петров А.Б.	
7	Количество продукции 1-го типа	Количество продукции 2-го типа				
8	5	6				
9				Расход сырья на единицу изделия 1-го типа	Расход сырья на единицу изделия 2-го типа	
10	Запас сырья 1-го вида	21	21	3	1	
11	Запас сырья 2-го вида	30	28	2	3	
13	Прибыль от продажи единицы изделия 1-го типа	Прибыль от продажи единицы изделия 2-го типа				
14	3	2		Значение функции цели:		27

Рис. 3. Пример выполнения работы

8. В ячейки A13 и B13 введите «Прибыль от продажи единицы изделия 1-го и 2-го типов».
9. В ячейки A14 и B14 занесите прибыль от продажи продукции – 3 и 2 соответственно.
10. В ячейку F14 занесите формулу, которая вычисляет прибыль предприятия от реализации продукции: $A$8*A14+$D$8*B14.
11. Подав команду **Сервис→Поиск решения**, открыть диалоговое окно **Поиск решения**.
12. В поле **Установить целевую** указать ячейку, содержащую оптимизируемое значение (F14). Установить переключатель **Равной максимальному значению** (Требуется максимальная прибыль).

13. В поле **Изменяя ячейки** задайте диапазон подбираемых параметров – A8:B8.
14. Чтобы определить ограничения щелкните по кнопке **Добавить.** В диалоговом окне **Добавление ограничения** на поле **Ссылка на ячейку** укажите диапазон C10:C11. В качестве условия установите знак $\leq$. В поле **Ограничение** задайте диапазон B10:B11. Это условие указывает запасы сырья не меньше расходов на производство данных типов изделий.
15. Повторите те же действия для диапазона A8:B8, в качестве условия – установите знак $\geq$, а ограничений – число 0. Это указывает, что число производимых изделий неотрицательно.
16. Необходимо указать, что нельзя производить доли изделий. Для этого в поле **Ссылка на ячейку** кнопки **Добавить** в качестве условия выбрать пункт **цел**.
17. Для произведения оптимизации щелкнуть по кнопке **Выполнить**, после завершения процесса оптимизации откроется диалоговое окно **Результаты поиска решения**. Для окончания работы устанавливается переключатель **Сохранить найденное решение**.
18. Сохраните рабочий лист в вашей папке (рис.3).

Задание

Требуется: решить задачу оптимизации (табл.1), сформулированную в приведенной выше математической постановке.

Таблица 1. Исходные данные

№	Задача оптимизации
1	$\begin{cases} 2\cdot x_1+5\cdot x_2+1\cdot x_3\leq 10 \\ 2\cdot x_1+0\cdot x_2+4\cdot x_3\leq 7 \\ 2\cdot x_1+1\cdot x_2+1\cdot x_3\leq 17 \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_3\geq 0 \end{cases}$ $F(x_1,x_2,x_3)=2\cdot x_1+3\cdot x_2+4\cdot x_3\to\max$
2	$\begin{cases} 2\cdot x_1+3\cdot x_2\leq 8 \\ 4\cdot x_1+0\cdot x_2\leq 25 \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0 \end{cases}$ $F(x_1,x_2,x_3)=3\cdot x_1+4\cdot x_2\to\max$
3	$\begin{cases} x_1+3\cdot x_2+8\cdot x_3\leq 5 \\ 2\cdot x_1+0\cdot x_2+x_3\leq 8 \\ 2\cdot x_1+3\cdot x_2+5\cdot x_3\leq 30 \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_3\geq 0 \end{cases}$ $F(x_1,x_2,x_3)=x_1+5\cdot x_2+2\cdot x_3\to\max$
4	$\begin{cases} 3\cdot x_1+2\cdot x_2+5\cdot x_3\leq 13 \\ 3\cdot x_1+x_2+0\cdot x_3\leq 9 \\ 0\cdot x_1+4\cdot x_2+7\cdot x_3\leq 18 \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_3\geq 0 \end{cases}$ $F(x_1,x_2,x_3)=7\cdot x_1+3\cdot x_2+x_3\to\max$
5	$\begin{cases} 13\cdot x_1+2\cdot x_2+5\cdot x_3\leq 27 \\ 7\cdot x_1+3\cdot x_2+x_3\leq 15 \\ x_1+0\cdot x_2+2\cdot x_3\leq 12 \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_3\geq 0 \end{cases}$ $F(x_1,x_2,x_3)=2\cdot x_1+9\cdot x_2+3\cdot x_3\to\max$
6	$\begin{cases} 2\cdot x_1+3\cdot x_2+5\cdot x_3\leq 20 \\ 8\cdot x_1+4\cdot x_2+x_3\leq 15 \\ x_1+x_2+0\cdot x_3\leq 2 \\ x_1\geq 0, x_2\geq 0, x_3\geq 0 \end{cases}$ $F(x_1,x_2,x_3)=3\cdot x_1+8\cdot x_2+4\cdot x_3\to\max$

7	$\begin{cases} 3\cdot x_1 + x_2 + 2\cdot x_3 \le 6 \\ 0\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + x_3 \le 4 \\ 4\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 3\cdot x_3 \le 5 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases} \quad F(x_1, x_2, x_3) = 4\cdot x_1 + 7\cdot x_2 + 5\cdot x_3 \to \max$
8	$\begin{cases} 22\cdot x_1 + 17\cdot x_2 + 3\cdot x_3 \le 47 \\ 5\cdot x_1 + 19\cdot x_2 + 11\cdot x_3 \le 34 \\ 8\cdot x_1 + 15\cdot x_2 + 17\cdot x_3 \le 27 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases} \quad F(x_1, x_2, x_3) = 5\cdot x_1 + 6\cdot x_2 + 6\cdot x_3 \to \max$
9	$\begin{cases} 3\cdot x_1 + 5\cdot x_2 + 2\cdot x_3 \le 15 \\ 4\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 3\cdot x_3 \le 9 \\ 5\cdot x_1 + 6\cdot x_2 + 4\cdot x_3 \le 30 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases} \quad F(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 3\cdot x_2 + 5\cdot x_3 \to \max$
10	$\begin{cases} 5\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 17\cdot x_3 \le 8 \\ 3\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + 5\cdot x_3 \le 10 \\ 4\cdot x_1 + 5\cdot x_2 + 8\cdot x_3 \le 23 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases} \quad F(x_1, x_2, x_3) = 10\cdot x_1 + 8\cdot x_2 + 6\cdot x_3 \to \max$
11	$\begin{cases} 8\cdot x_1 + 17\cdot x_2 + x_3 \le 31 \\ 5\cdot x_1 + 8\cdot x_2 + 9\cdot x_3 \le 17 \\ 2\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 5\cdot x_3 \le 22 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases} \quad F(x_1, x_2, x_3) = 3\cdot x_1 + 6\cdot x_2 + 10\cdot x_3 \to \max$
12	$\begin{cases} 10\cdot x_1 + 7\cdot x_2 \le 14 \\ 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \le 19 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases} \quad F(x_1, x_2) = 9\cdot x_1 + 5\cdot x_2 \to \max$
13	$\begin{cases} 3\cdot x_1 + x_2 \le 15 \\ x_1 + 4\cdot x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases} \quad F(x_1, x_2) = 3\cdot x_1 + 9\cdot x_2 \to \max$
14	$\begin{cases} 4\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + x_3 \le 26 \\ 7\cdot x_1 + x_2 + 4\cdot x_3 \le 9 \\ 5\cdot x_1 + 8\cdot x_2 + 0\cdot x_3 \le 50 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases} \quad F(x_1, x_2, x_3) = 5\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + 6\cdot x_3 \to \max$
15	$\begin{cases} 5\cdot x_1 + 6\cdot x_2 + 3\cdot x_3 \le 11 \\ 2\cdot x_1 + 5\cdot x_2 + 12\cdot x_3 \le 38 \\ 3\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 4\cdot x_3 \le 12 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0 \end{cases} \quad F(x_1, x_2, x_3) = 4\cdot x_1 + 7\cdot x_2 + x_3 \to \max$

Лабораторная работа № 5. Решение задач нелинейной оптимизации

Краткая теория

Задача оптимизации предполагает нахождение наилучшего (оптимального) решения в заданных условиях. Общая постановка задачи имеет вид:

$$\begin{aligned} &z = f(x) \to \max(\min); \\ &g_i(x) = 0,\ i = \overline{1, l}; \\ &g_i(x) \ge 0,\ i = \overline{l+1, m}, \end{aligned} \qquad (1)$$

где $z = f(x)$ называется целевой функцией; условия $g_i(x) = 0,\ i = \overline{1, l}$ и $g_i(x) \ge 0,\ i = \overline{l+1, m}$ – условиями ограничениями; переменная x может рассматриваться как простая переменная или как вектор вида $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Множество точек x, для которых выполняются условия ограничения, обычно обозначают Ω и называют **областью допустимых решений**.

Если в задаче (1) хотя бы одна из функций $f(x)$ или $g_i(x)$ нелинейная, то задача относится к задачам нелинейного программирования.

В отличие от линейных задач в нелинейных допустимая область может иметь бесконечное множество крайних точек, а целевая функция может достигать своего экстремума не только на границе, но и внутри области.

Для решения задач нелинейной оптимизации универсальных методов не существует. Вместе с тем имеются специальные типы таких задач, которые хорошо исследованы теоретически. К ним относятся задачи с выпуклыми (вогнутыми) целевыми функциями, рассматриваемые на выпуклых множествах.

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве *X*, называется выпуклой, если для любых точек x_1 и x_2 из *X* и $\forall\lambda,\ 0 \le \lambda \le 1$ справедливо

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве *X*, называется вогнутой на множестве *X*, если для любых точек x_1 и x_2 из *X* и $\forall\lambda,\ 0 \le \lambda \le 1$ справедливо

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Типовой задачей выпуклого программирования является задача вида:

$$\begin{aligned} &z = f(x) \to \min; \\ &\varphi_i(x) \le 0,\ i = \overline{1, m}; \\ &x \ge 0, \end{aligned}$$

где $f(x)$ и $\varphi_i(x),\ i = \overline{1, m}$ выпуклые функции.

Если $f(x)$ и $\varphi_i(x),\ i = \overline{1, m}$ вогнутые функции, то соответствующая типовая формулировка имеет вид:

$$\begin{aligned} &z = f(x) \to \max; \\ &\varphi_i(x) \ge 0,\ i = \overline{1, m}; \\ &x \ge 0. \end{aligned}$$

Строгое решение задач нелинейного программирования требует, как правило, проведения дополнительных исследований области решения и самой функции. Это необходимо для обоснованного выбора стартовых точек.

Решение задач нелинейной оптимизации выполняется следующим образом:

1) проводится исследование целевой функции в области решения с целью выявления особенностей ее поведения в отдельных точках;

2) проводится исследование области решения с целью выбора нескольких стартовых точек, при этом стремятся выбрать их как можно ближе к оптимальной точке (точкам);

3) строится вычислительная область на листе Excel;

4) выполняется расчет с помощью надстройки «Поиск решения» для каждой из выбранных стартовых точек. Полученные результаты сравниваются. При совпадении результатов делается вывод о том, что оптимальная точка найдена.

Заметим, что при неудачном выборе стартовой точки могут возникать ситуации, когда в результате применения «Поиск решения» получаются совершенно различные и даже неправильные решения. Рассмотрим такой пример.

Пример 1. Найти $z = x^2 \to \max$ при условии $-1 \le x \le 2$.

Построим расчетную область на листе Excel, как показано в таблице:

	A	*B*	*C*
1	*x*=	0	
2	*Z*=	= *B*1^2	
3	1 огр	= *B*1+1	
4	2 огр	= *B*1–2	

Применение пакета «Поиск решения» позволяет получить следующие решения x^* и $z_{\max}$ данной задачи в зависимости от выбора стартовой точки:

– если стартовое значение $x = 0$, то $z_{\max} = 0$, $x^* = 0$;

– если стартовое значение $x = -0{,}1$, то $z_{\max} = 1$, $x^* = -1$;

– если стартовое значение $x = 0{,}1$, то $z_{\max} = 4$, $x^* = 2$.

Таким образом, в зависимости от стартового значения получаем разные значения $z_{\max}$.

Проведем исследование рассматриваемой задачи. Целевая функция здесь является нелинейной. Ее график парабола с вершиной в точке (0; 0). Исследование графика функции $z = x^2$ на интервале $-1 \le x \le 2$, показывает, что наибольшее значение функции $z_{\max} = 4$ и достигается в точке $x = 2$.

Рассмотренный пример показывает, что чем ближе оказывается выбранная стартовая точка к точке экстремума, тем более вероятно, что полученный результат поиска решения будет соответствовать действительности. Поэтому решения задач нелинейной оптимизации с использованием пакета «Поиск решения» требует проведения дополнительного исследования функции и допустимой области решения, а также последующего анализа полученных результатов.

Если такое исследование выполнить затруднительно, например, из-за большой размерности задачи, то универсальным средством повышения надежности нахождения правильного решения является перебор большого числа стартовых точек, лежащих в разных частях области допустимых решений.

Замечания:

1. Для нелинейных функций при решении задачи на определение наибольшего (наименьшего) значения рекомендуется выбирать несколько разных стартовых точек, удовлетворяющих ограничениям. Тогда решением задачи считается то из полученных значений, которое чаще всего повторяется.

2. Если функция на заданной области (система ограничений) достигает одинакового наибольшего (наименьшего) значения сразу в нескольких точках, то «Поиск решения» находит ту точку *x*, где $y_{\max} = y(x)$, которая располагается ближе к заданной стартовой точке.

3. Проверить работу надстройки «Поиск решения» для функции одного или двух переменных можно, используя график функции на заданной области ограничений.

Пример 2. Задана функция $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$. Найти наибольшее значение функции на отрезке $[-3; 3]$.

Решение. Для определения наибольшего значения составим задачу:

$$\begin{cases} y(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10 \to \max, \\ x \ge -3, \quad x \le 3, \end{cases}$$

где x – переменная, которая изменяется и удовлетворяет условию $x \in [-3; 3]$; $y(x)$ – целевая функция.

Построим область вычислений (рис. 1).

	A	B	C	D
1	x=	0		
2	y(x)=	=2*B1^3-3*B1^2-12*B1+10		
3				

Рис. 1. Расчетная область на листе Excel

Так как область Ω задана простыми неравенствами, а не уравнениями, то внесем их сразу в ограничения в окне «Поиск решения». Заполним окно «Поиск решения», как показано на рис. 2.

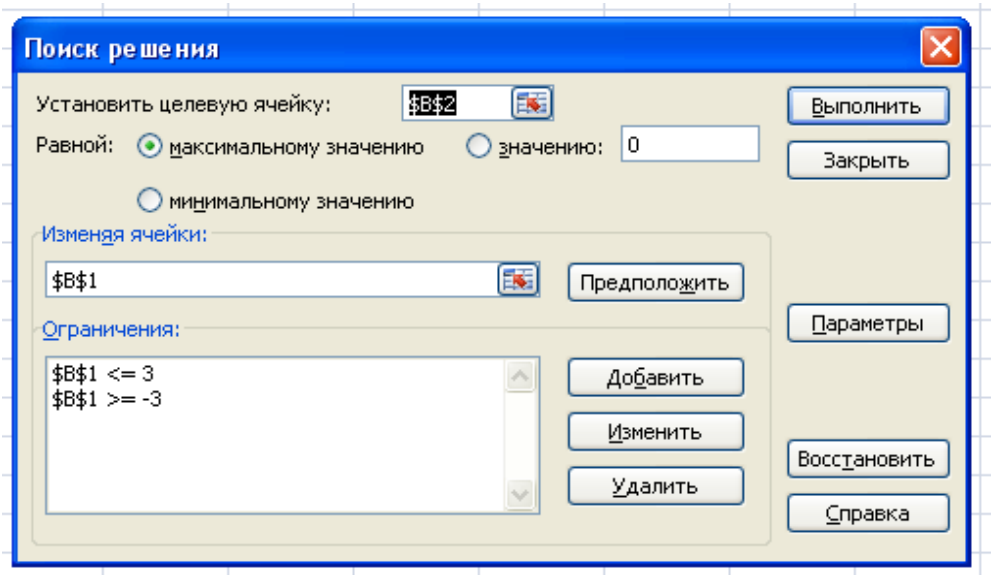


Рис. 2. Настройка окна "Поиск решения"

После нажатия кнопки «Выполнить», получаем решение:

– в ячейке B1 значение x, при котором функция достигает своего наибольшего значения: $x_{\max} = -1$;

– в ячейке B2 значение функции $y(x)$, которое является для нее наибольшим, то есть $y_{\max} = y(-1) = 17$.

Аналогично находится наименьшее значение функции.

Пример 3. Найти экстремум функции $z = x_1 + 3x_2$ при условии, что переменные x_1, x_2 неотрицательны и удовлетворяют системе неравенств:

$$9 \le x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 - 6x_2 + 34 \le 36;$$

$$x_1 + x_2 \ge 8;$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Решение. Прежде чем изобразить на плоскости x_1Ox_2 область решений, выполним ее преобразование:

$$x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 - 6x_2 + 34 = x_1^2 - 10x_1 + 25 + x_2^2 - 6x_2 + 9 =$$

$$= (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2;$$

$$(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 \ge 9;$$

$(x_1-5)^2+(x_2-3)^2 \le 36$.

Последние неравенства определяют кольцо с центром в точке $(5;\,3)$ с радиусами $R_1=3$ и $R_2=6$ (рис. 3). Линия $x_1+x_2=8$ отрезает часть кольца и в результате получается область допустимых решений, очерченная на рис. 3 жирной линией.

Целевая функция z определена на плоскости x_1Ox_2. Ее поведение можно проиллюстрировать на координатной плоскости линиями уровня $z=d_k=\text{const}$, $k=1,\,2,\,3,\,\ldots$ Выбирая значения d_k, получаем семейство прямых, параллельных между собой и перпендикулярных вектору $\overline{n}=(1;\,3)$. Из математического анализа известно, что функция $z=x_1+3x_2$ будет возрастать в направлении вектора $\overline{n}$ и убывать при движении в противоположном направлении. Поэтому, если $0<d_k<d_j$, то линия уровня $z=d_k$ располагается ближе к линии уровня $z=0$, чем $z=d_j$. Из рис. 3 следует, что наибольшее значения целевой функции достигается в точке (6,8; 8,7) и при этом $z_{\max}=32{,}97$. Наименьшее значение достигается в точке (8; 0), в которой $z_{\min}=8$.

Проиллюстрируем на этом примере работу пакета «Поиск решения». Построим расчетную область, вводя соответствующие данные и формулы, как показано на рис. 4. Затем заполним окно поиск решения, причем установим сначала флажок поиска «максимальному значению». Стартовые точки будем выбирать в области допустимых решений.

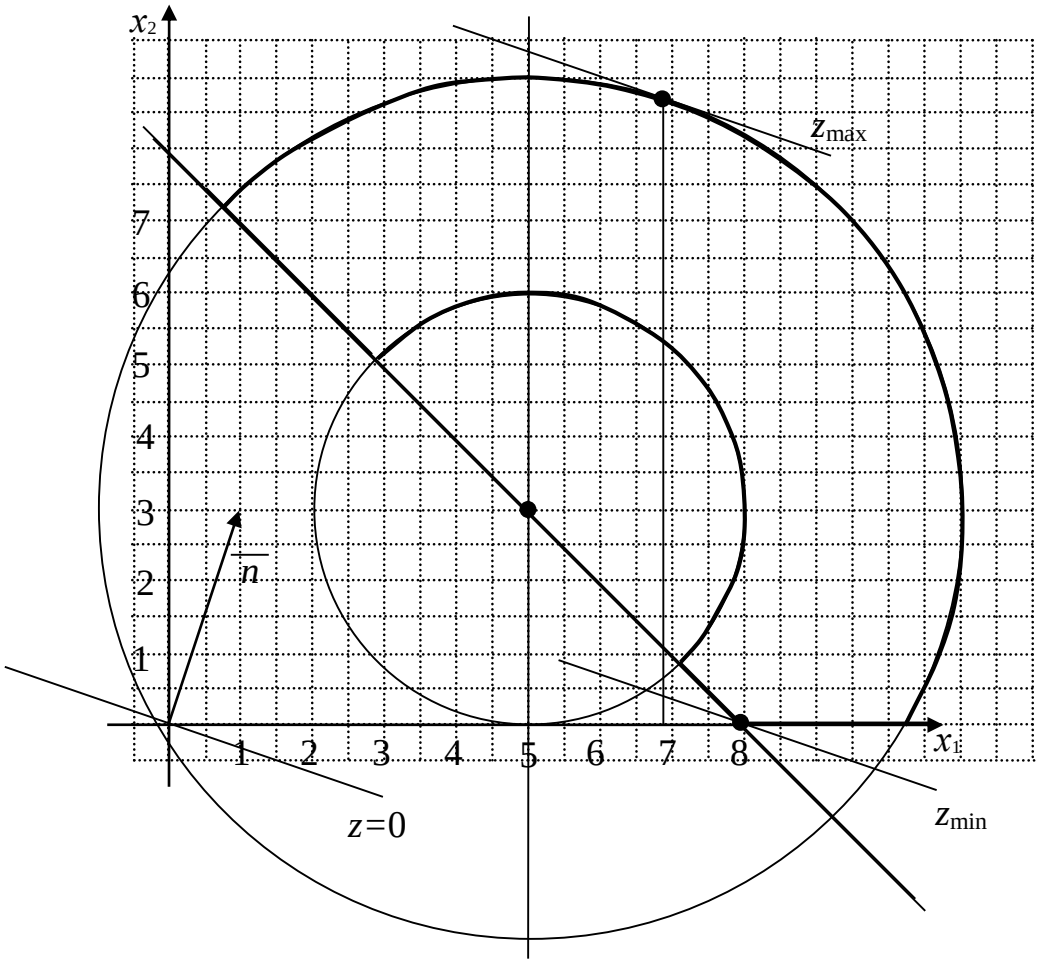


Рис. 3. Область допустимых решений

	A	B	C
1	x1=	0	
2	x2=	0	

3	z=	=B1+3*B2	
4	1-е ограничение	=(B1-5)^2+(B2-3)^2	
5	2-е ограничение	=B1+B2	

Рис. 4. Расчетная область на листе Excel

Выберем несколько стартовых точек для определения наибольшего значения целевой функции. Полученные результаты сведем в табл. 1.

Таблица 1

Стартовые точки		Результат поиска z_{max}		
x_1	x_2	x_1	x_2	z_{max}
8	5,5	6,898	8,692	32,974
8,5	6	6,898	8,692	32,974
9	7	6,897	8,692	32,974
4	8	6,898	8,692	32,974

Аналогично, выберем несколько стартовых точек для определения наименьшего значения целевой функции. Результаты расчетов приведены в табл. 2.

Таблица 2

Стартовые точки		Результат поиска z_{min}		
x_1	x_2	x_1	x_2	z_{min}
8	1	8,000	0	8,000
8,5	0,5	8,000	0	8,000
4	6	2,879	5,121	18,243
2	7	2,879	5,121	18,243
9	2	8,000	0	8,000

Анализ результатов позволяют сформулировать следующие выводы:

– чем ближе выбранная стартовая точка расположена к точке экстремума, тем точнее находится точное решение задачи, как на минимум, так и на максимум, для которых соответственно:

– $z_{\max} = 32{,}97; \quad x = (6{,}8;\ 8{,}7)$;

– $z_{\min} = 8; \quad x = (8;\ 0)$.

Пример 4. Найти $z = 5x_1 - 0{,}2x_1^2 + 2x_2 - 0{,}2x_2^2 \to \max$ при условиях

$13x_1 + 6x_2 \le 90$;

$8x_1 + 11x_2 \le 88$;

$x_1,\ x_2 \ge 0$.

Решение. В данной задаче целевая функция является нелинейной, а условия-ограничения задаются линейными функциями. Построим область допустимых решений (рис. 5).

Преобразуем целевую функцию

$$z = 5x_1 - 0{,}2x_1^2 + 2x_2 - 0{,}2x_2^2 = 5x_1 - \frac{1}{5}x_1^2 + 2x_2 - \frac{1}{5}x_2^2 =$$

$$= \frac{1}{5}\left(25x_1 - x_1^2\right) + \frac{1}{5}\left(10x_2 - x_2^2\right) = \frac{1}{5}\left(25x_1 - x_1^2 + \frac{625}{4} - \frac{625}{4}\right) +$$

$$+ \frac{1}{5}\left(10x_2 - x_2^2 - 25 + 25\right) = -\frac{1}{5}\left(x_1 - \frac{25}{2}\right)^2 - \frac{1}{5}(x_2 - 5)^2 + \frac{625}{4} + 5 =$$

$$= -\frac{1}{5}\left(x_1 - \frac{25}{2}\right)^2 - \frac{1}{5}(x_2 - 5)^2 + \frac{645}{4}.$$

Функция z определяет параболоид вращения относительно оси Oz с осью, проходящей через точку $\left(\frac{25}{2};\ 5;\ 0\right)$ параллельно Oz. Проекции линий уровня z на плоскость Ox_1x_2 – окружности с центром в точке $\left(\frac{25}{2};\ 5\right)$ (пунктирные круги на рис. 5). Задавая фиксированное значение функции $C = \text{const}$, получаем уравнения линей уровня:

$$\left(x_1 - \frac{25}{2}\right)^2 + (x_2 - 5)^2 = \frac{5 \cdot 645}{4} - C.$$

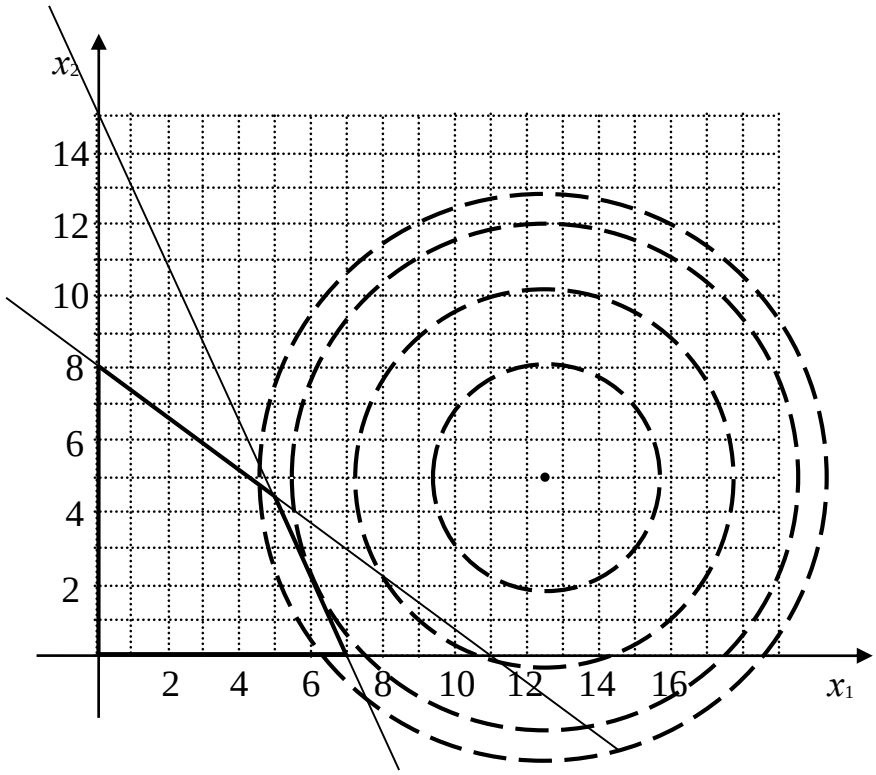


Рис. 5. Область допустимых решений

Отсюда следует, что $\frac{5 \cdot 645}{4} > C$, то линиями уровня целевой функции являются окружности с центром в точке $\left(\frac{25}{2};\ 5\right)$. При $\frac{5 \cdot 645}{4} < C$ решений задачи в действительных числах нет.

Выбирая несколько стартовых точек, получим следующие результаты:

Стартовые точки		Результат		
x_1	x_2	x_1	x_2	z_{max}
0	0	6	2	26
6	1	6	2	26
5	1	6	2	26

Таким образом, наибольшее значение функции находится в точке $(6, 2)$ и равно $z_{\max} = 26$.

Лабораторная работа № 6. Анализ временных рядов

Краткая теория

Временным рядом называется набор наблюдаемых значений какого-либо показателя y, которые фиксируются с некоторым постоянным шагом (через день, неделю, месяц, квартал, год). Такой набор полностью определен значениями показателя y_k и номером k, соответствующим моменту времени t_k его фиксации. Поэтому под временным рядом показателя будем понимать набор его значений $y_1, y_2, ..., y_k, ..., y_n$ в моменты времени $t_1, t_2, ..., t_k, ..., t_n$.

Анализ временных рядов обычно предполагает решение двух задач.

1. Выявление тенденции изменения показателя во времени или, как говорят иначе, тренда. Эта задача сводится к нахождению относительно простой функции $y = f(t)$, описывающей изменение показателя. В качестве такой функции обычно используются линейная, квадратичная или тригонометрическая функции.

2. Выполнение прогноза изменения анализируемого показателя во времени на период τ $(\tau = 1, 2, 3, ...)$.

Проиллюстрируем решение перечисленных задач на следующем примере. Пусть известен объем выпуска продукции по месяцам с января по май (с 1-го по 5-й месяцы), который задается табл. 1.

Таблица 1. Объем выпуска продукции

Месяц (t_k)	1	2	3	4	5
Объем выпуска (y_k) тыс. шт.	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

В табл. 1 объем выпуска y_k (тыс. шт.) в k-й месяц ($k = \overline{1,5}$) задается равенством:

$$y_k = 10 + 0{,}05(p + 2q + 1)k + 0{,}01(p + q + 1)k^2 + 0{,}02(2p + q + 1)(-1)^k, \quad (1)$$

Используя данные (1) в табл. 1, определить:

1. Линейный тренд, описывающий изменение объема выпуска по месяцам в виде:

$$y(t) = f_1(t) = c_1 + c_2 t, \; t = t_k = k, \; k = \overline{1,5}. \quad (2)$$

2. Квадратичный тренд, задаваемый равенством:

$$y = f_2(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2, \; t = t_k = k, \; k = \overline{1,5}. \quad (3)$$

3. Погрешность приближения данных временным рядом при использовании трендов (2), (3).

4. Прогнозируемое значение объема выпуска в июне (6 месяц года).

Цифровая модель, используемая при решении задачи

1. Найдем коэффициенты c_1, c_2, задающие линейный тренд (2) методом наименьших квадратов (МНК), минимизируя отклонения между заданными значениями y_k и значениями, полученными по формуле (2), то есть из условия:

$$\rho = \sum_{k=1}^{n} (c_1 + c_2 t_k - y_k)^2 \to \min.$$

Согласно МНК получаем следующую СЛАУ относительно неизвестных c_1, c_2:

$$a_{11}c_1 + a_{12}c_2 = b_1;$$
$$a_{21}c_1 + a_{22}c_2 = b_2, \qquad (4)$$

где $a_{11} = \sum_{k=1}^{5} 1 = n$; $a_{12} = a_{21} = \sum_{k=1}^{5} t_k = 15$; $a_{22} = \sum_{k=1}^{5} t_k^{\,2} = 55$; $b_1 = \sum_{k=1}^{5} y_k$; $b_2 = \sum_{k=1}^{5} t_k y_k$.

В результате решения СЛАУ (4) находятся значения c_1, c_2 и линейный тренд (4).

2. Для нахождения коэффициентов c_1, c_2, c_3 квадратичного тренда (3) МНК формируется СЛАУ вида:

$$a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3 = b_1;$$
$$a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3 = b_2; \qquad (5)$$
$$a_{31}c_1 + a_{32}c_2 + a_{33}c_3 = b_3,$$

где $a_{11} = n$; $a_{12} = a_{21} = \sum_{k=1}^{5} t_k$; $a_{13} = a_{31} = \sum_{k=1}^{5} t_k^2$; $a_{22} = \sum_{k=1}^{5} t_k^{\,2}$; $a_{23} = a_{32} = \sum_{k=1}^{5} t_k^{\,3}$; $a_{33} = \sum_{k=1}^{5} t_k^{\,4}$; $b_1 = \sum_{k=1}^{5} y_k$; $b_2 = \sum_{k=1}^{5} t_k y_k$; $b_3 = \sum_{k=1}^{5} t_k^2 y_k$.

В результате решения СЛАУ (5) находятся неизвестные c_1, c_2, c_3, затем с учетом равенства (3) квадратичный тренд.

3. Для нахождения погрешности приближения временного ряда линейным трендом (2) сначала находится относительная погрешность в узлах

$$\delta_k^{(1)} = \frac{|f_1(t_k) - y_k|}{y_k} \cdot 100\%, \quad k = \overline{1,5}, \qquad (6)$$

В качестве погрешности квадратичного приближения принимается наибольшее из значений (6).

При квадратичном приближении (6) находится значение:

$$\delta_k^{(2)} = \frac{|f_2(t_k) - y_k|}{y_k} \cdot 100\%, \quad k = \overline{1,5}, \qquad (7)$$

а затем среди полученных значений выбирается наибольшее, которое и принимается в качестве погрешности квадратичного приближения.

4. Прогнозирование объема выпуска с использованием трендов (2), (3) в июне (шестой месяц) выполняется по формулам:

$$y_6^{(1)} = f_1(6); \; y_6^{(2)} = f_2(6).$$

Методические рекомендации по выполнению работы

Цель работы: овладеть навыками моделирования изменения показателя во времени и выполнение прогноза изменения анализируемого показателя на период τ $(\tau = 1, 2, 3, \ldots)$.

Рассмотрим порядок выполнения работы для случая $p = 0$ и $q = 0$. Объем выпуска продукции тогда вычисляется по формуле (1):

$$y_k = 10 + 0{,}05k + 0{,}01k^2 + 0{,}02(-1)^k, \; k = \overline{1,5}.$$

На листе Excel (рис. 1) сформируем расчетную область. Для построения табл. 1 с исходными данными выполняются следующие действия:

1) создаем автоматизированный список с номерами месяцев в ячейках B3:F3;
2) используя формулу (1), вычисляем объем выпуска продукции

B4→ =10+0,05*($B$1+2*$D$1+1)*B3+0,01*($B$1+$D$1+1)*B3^2+ 0,02*(2*$B$1+$D$1+1)*(-1)^B3.

Формулу распространяем так, чтобы получить значение выпуска продукции для всех месяцев.

Сначала найдем коэффициенты c_1 и c_2 линейного тренда $y(t) = f_1(t) = c_1 + c_2 t$. Для их вычисления сформируем систему уравнений (4), используя формулы для расчета ее коэффициентов:

$a_{11} = \sum_{k=1}^{5} 1 = n$ B8→ =F1;

$a_{12} = a_{21} = \sum_{k=1}^{5} t_k$; C8→ =СУММ(B3:F3); B9→ =C8;

$a_{22} = \sum_{k=1}^{5} t_k{}^2$; C9→ =СУММКВ(B3:F3);

$b_1 = \sum_{k=1}^{5} y_k$; D8→ =СУММ(B4:F4);

$b_2 = \sum_{k=1}^{5} t_k y_k$; D9→ =СУММПРОИЗВ(B3:F3;B4:F4),

где функция СУММКВ(арг) подсчитывает сумму возведенных в квадрат аргументов.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	p=	0	q=	0	n=	5			
2	Объем выпуска продукции								
3	Месяц t_k	1	2	3	4	5			
4	Объем выпуска y_k	10,04	10,16	10,22	10,38	10,48			
5	t_k^2								
6		Линейный тренд				Квадратичный тренд			
7		c1	c2			c1	c2	c3	
8		5	15	51,28		5	15	55	51,28
9		15	55	154,9		15	55	225	154,9
10		Решение:				55	225	979	570,7
11		1	3	10,26		Решение:			
12			10	1,1		4,6	-3,3	0,5	4,6
13			**c1=**	**9,926**		-3,3	2,671	-0,429	-3,3
14			**c2=**	**0,11**		0,5	-0,429	0,071	0,5
15							**c1=**	**9,956**	
16							**c2=**	**0,084**	
17							**c3=**	**0,004**	

Рис. 1. Вычисление коэффициентов первого и второго трендов

Решим систему методом Гаусса. Разделим первое уравнение на a_{11}:

B11→ 1;

C11→ =C8/$B$8.

Формулу из ячейки C11 распространяем вправо на ячейку D11.

Далее из второго уравнения вычтем первое, умноженное на a_{21}:

C12→ =C9-C11*$B$9.

Формулу из ячейки C12 распространяем вправо на ячейку D12.

Вычислим неизвестные:

D14→ =D12/C12;

D13→ =D11-C11*D14.

Теперь вычислим коэффициенты квадратичного тренда c_1, c_2 и c_3, используя систему (5). Для коэффициентов системы (5) понадобится вычислять сумму t_k^4, поэтому сделаем вспомогательные вычисления. Добавим еще одну строку с заголовком «t_k^2» и посчитаем для нее данные по формуле

B5→=B3^2,

которую распространим вправо для всех пяти лет.

Для этого также сформируем сначала матрицу системы (рис. 1):

$a_{11} = n$; F8→5

$a_{12} = a_{21} = \sum_{k=1}^{5} t_k$; G8→=СУММ(B3:F3); F9→ =G8;

$a_{13} = a_{31} = \sum_{k=1}^{5} t_k^2$; H8→ =СУММКВ(B3:F3); F10→=H7;

$a_{22} = \sum_{k=1}^{5} t_k{}^2$; G9→ =H8;

$a_{23} = a_{32} = \sum_{k=1}^{5} t_k{}^3$; H9→ =СУММПРОИЗВ(B5:F5;B3:F3);

$a_{33} = \sum_{k=1}^{5} t_k{}^4$; H10→ =СУММКВ(B5:F5);

$b_1 = \sum_{k=1}^{5} y_k$; I8→ =СУММ(B4:F4);

$b_2 = \sum_{k=1}^{5} t_k y_k$; I9→ =СУММПРОИЗВ(B4:F4;B3:F3);

$b_3 = \sum_{k=1}^{5} t_k^2 y_k$; I10→ =СУММПРОИЗВ(B4:F4;B5:F5).

Решим матричную систему матричным методом:

1) F12→ =МОБР(F8:H10),

2) выделяем диапазон F8:H10, размещаем курсор в строке формул и нажимаем одновременно Ctrl, Shift, Enter.

Теперь сравним расчеты реального объема продукции по заданной формуле (1) и по формулам (2) и (3). Для этого на листе Excel сформируем дополнительно еще одну таблицу (рис. 2), куда скопируем уже рассчитанный объем выпуска продукции по формулам (1) и вычислим объем продукции при использовании построенных трендов:

B21→ =B24;

B22→ =$D$13+$D$14*B20;

B23→ =$H$15+$H$16*B20+$H$17*B20^2.

Полученные формулы распространим вправо, заполняя диапазон B21: G23.

	A	B	C	D	E	F	G
19	Объем выпуска продукции						
20	Месяц t_k	1	2	3	4	5	**6**
21	Объем выпуска y_k	10,04	10,16	10,22	10,38	10,48	
22	Линейный тренд	10,036	10,15	10,26	10,37	10,476	**10,59**
23	Квадратичный тренд	10,045	10,14	10,25	10,36	10,485	**10,62**
24	Погреш. лин. тренда в точках	0,0004	0,001	0,004	0,001	0,0004	
25	Погреш. кв. тренда в точках	0,0005	0,002	0,003	0,002	0,0004	
26	Погреш. лин. тренда	0,0035					
27	Погреш. кв. тренда	0,0027					

Рис. 2. Сравнение моделей

Вычислим погрешность по годам по формулам (6) и (7) соответственно для линейного тренда и квадратичного:

B24→ =ABS(B22-B21)/B21;

B25→ =ABS(B23-B21)/B21,

где функция ABS(число) вычисляет модель аргумента. Растягиваем формулы вправо.

Найдем погрешность вычисления:

– для линейного тренда B26→ =МАКС(B24:F24);

– для квадратичного тренда B27→ =МАКС(B25:F25).

Сравнивая значения погрешностей, можно сделать вывод, что использование квадратичного тренда в данном случае лучше, так как погрешность вычислений для него меньше (0,0027 или 0,27 %).

Выполним прогноз для шестого месяца. Добавим в строку «Месяц t_k» еще одно число, выделим ячейки F22:F23 и сместим формулу вправо, используя маркер автозаполнения. Из расчетов видно, что линейный тренд прогнозирует объем выпуска 10,59 тыс. шт., а квадратичный 10,62 тыс. шт.

Реализация в Excel и оформление отчета

Порядок выполнения работы предполагает:

1. Используя формулу (1), найти для заданных значений p и q объем выпуска продукции y_k, $k=\overline{1,5}$, и построить табл. 1.

2. Решить задачу, используя линейный тренд вида (2). Рассчитать коэффициенты для системы (4) и, применяя формулу (2), вычислить значения $f_1(t_k)$, $k=\overline{1,6}$.

3. Решить задачу, используя квадратичный тренд вида (3). Рассчитать коэффициенты для системы (5) и, применяя формулу (3), вычислить значения $f_2(t_k)$, $k=\overline{1,6}$.

4. Определить погрешность прогнозирования при применении линейного тренда.

5. Определить погрешность прогнозирования при применении квадратного тренда.

6. Сравнить полученные погрешности при использовании линейного и квадратичного трендов.

7. Найти прогнозируемое значение выпуска в шестом месяце.

Отчет оформляется с использованием текстового процессора Microsoft Word и включает:

1. Постановку задачи для заданных значений параметров p и q (табл.3)

2. Математическую модель задачи. Запись линейного и квадратичного трендов для прогнозирования показателя. Составление систем уравнений для нахождения коэффициентов.

3. Вычисление коэффициентов системы уравнений (4) для определения параметров c_1 и c_2 линейного тренда (2)

4. Вычисление коэффициентов системы уравнений (5) для определения параметров c_1, c_2 и c_3 квадратичного тренда (3).

5. Вычисление значений показателя по формулам (2) и (3). Для этого составляется таблица 2:

Месяц (t_k)	1	2	3	4	5	6
Объем выпуска (y_k) тыс. шт.	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	–
Линейный тренд	$f_1(t_1)$	$f_1(t_2)$	$f_1(t_3)$	$f_1(t_4)$	$f_1(t_5)$	$f_1(t_6)$
Квадратичный тренд	$f_2(t_1)$	$f_2(t_2)$	$f_2(t_3)$	$f_2(t_4)$	$f_2(t_5)$	$f_2(t_6)$
Погрешность линейного тренда	$\delta_1^{(1)}$	$\delta_2^{(1)}$	$\delta_3^{(1)}$	$\delta_4^{(1)}$	$\delta_5^{(1)}$	$\max \delta_k^{(1)}$
Погрешность квадратичного тренда	$\delta_1^{(2)}$	$\delta_2^{(2)}$	$\delta_3^{(2)}$	$\delta_4^{(2)}$	$\delta_5^{(2)}$	$\max \delta_k^{(2)}$

6. Определение погрешности вычисления показателя по формулам (2) и (3). Для этого добавим к табл. 2 соответствующие строки «погрешность линейный тренд» и «погрешность квадратичный тренд». Затем подсчитаем, используя функцию МАКС(), наибольшее значение из $\delta_k^{(1)}$ и $\delta_k^{(2)}$. Сравнить полученные значения.

7. Построить графики изменения реального объема выпуска (значение функцию y_k, $k=\overline{1,5}$), линейного тренда (функцию $f_1(t)$), квадратичного тренда (функцию $f_2(t)$).

8. Записать выводы.

Таблица 3.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
p	0	1	1	1	2	2	2	0	3	3	1	0	3	3	2
q	1	0	1	2	1	2	0	2	3	1	3	3	0	2	3

Лабораторная работа № 7. Экономико-математическая модель межотраслевого баланса (модель Леонтьева).

Краткая теория

Рассмотрим модель межотраслевого баланса, называемую еще моделью Леонтьева или моделью «затраты-выпуск».

Предположим, что производственный сектор народного хозяйства разбит на n отраслей (энергетика, машиностроение, сельское хозяйство и т.д.).

Рассмотрим отрасль i, i = 1, 2,…, n. Она выпускает некую продукцию за данный промежуток времени (например, за год) в объеме x_i, который еще называют валовым выпуском. Часть объема продукции x_i , произведенная i-ой отраслью используется для собственного производства в объеме x_{ii} , часть - поступает в остальные отрасли j = 1, 2,…, n для потребления при производстве в объемах x_{ij} , и некоторая часть объемом y_i - для потребления в непроизводственной сфере, так называемый объем конечного потребления. Перечисленные сферы распределения валового продукта i-ой отрасли приводят к соотношению баланса

$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} + y_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i$, i = 1, 2,…, n .

Введем коэффициенты прямых затрат aij , которые показывают, сколько единиц продукции i-ой отрасли затрачивается на производство одной единицы продукции в отрасли j. Тогда можно записать, что количество продукции, произведенной в отрасли i в объеме xij и поступающей для производственных нужд в отрасль j, равно

$$x_{ij} = a_{ij} x_j$$

Считаем сложившуюся технологию производства во всех отраслях неизменной (за рассматриваемый период времени), означающую, что коэффициенты прямых затрат aij постоянны. Тогда получаем следующее соотношение баланса, называемого **моделью Леонтьева**

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i \quad , \text{ i = 1, 2,…, n .(1)}$$

Введя вектор валового выпуска X, матрицу прямых затрат A и вектор конечного потребления Y

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

модель Леонтьева (1) можно записать в матричном виде

$$X = AX + Y \qquad (2)$$

Матрица A, у которой все элементы aij неотрицательны, называется **продуктивной матрицей**, если существует такой неотрицательный вектор X, для которого выполняется неравенство

$$X > AX.$$

Это неравенство означает, что существует хотя бы один режим работы отраслей данной экономической системы, при котором продукции выпускается больше, чем затрачивается на ее производство. Другими словами, при этом режиме создается конечный (прибавочный) продукт

$$Y = X - AX > 0.$$

Модель Леонтьева с продуктивной матрицей A называется **продуктивной моделью.**

Для проверки продуктивности матрицы A достаточно существования обратной матрицы $B = (E - A)^{-1}$ с неотрицательными элементами, где матрица E - единичная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

С помощью модели Леонтьева (2) можно выполнить три вида плановых расчетов, при условии соблюдения условия продуктивности матрицы A:

1) Зная (или задавая) объемы валовой продукции всех отраслей X, можно определить объемы конечной продукции всех отраслей Y

$$Y = (E - A)X$$

2) Задавая величины конечной продукции всех отраслей Y, можно определить величины валовой продукции каждой отрасли

$$X = (E - A)^{-1}Y \qquad (3)$$

3) Задавая для ряда отраслей величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей - объемы конечной продукции, можно найти величины конечной продукции первых отраслей и объемы валовой продукции вторых.

Матрица

$$B = (E - A)^{-1}$$

называется **матрицей полных материальных затрат.** Ее смысл следует из матричного равенства (3), которое можно записать в виде X = BY. Элементы матрицы B показывают, сколько всего необходимо произвести продукции в i-ой отрасли, для выпуска в сферу конечного потребления единицы продукции отрасли j.

Цель работы: сделать анализ перетока товаров между отраслями экономики, обеспечивающего такое функционирование производственного сектора, когда объем выпуска соответствует суммарному (т.е. производственному и конечному) спросу на товары.

Пример выполнения работы

Задача: экономическая система состоит из трех отраслей, для которых матрица прямых затрат A и вектор конечного продукта Y известны:

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.5 & 0.0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Определить:

1) Матрицу коэффициентов полных материальных затрат B;
2) Проверить продуктивность матрицы A;
3) Вектор валового выпуска X;
4) Межотраслевые поставки продукции x_{ij}.

Решение: Модель Леонтьева имеет вид:

$$X = AX + Y.$$

Матрица полных материальных затрат B равна:

$$B = (E - A)^{-1}$$

Продуктивность матрицы А проверяется, по вычисленной матрице В. Если эта матрица существует и все ее элементы неотрицательны, то матрица А продуктивна.

Вектор валового выпуска X рассчитывается по формуле:

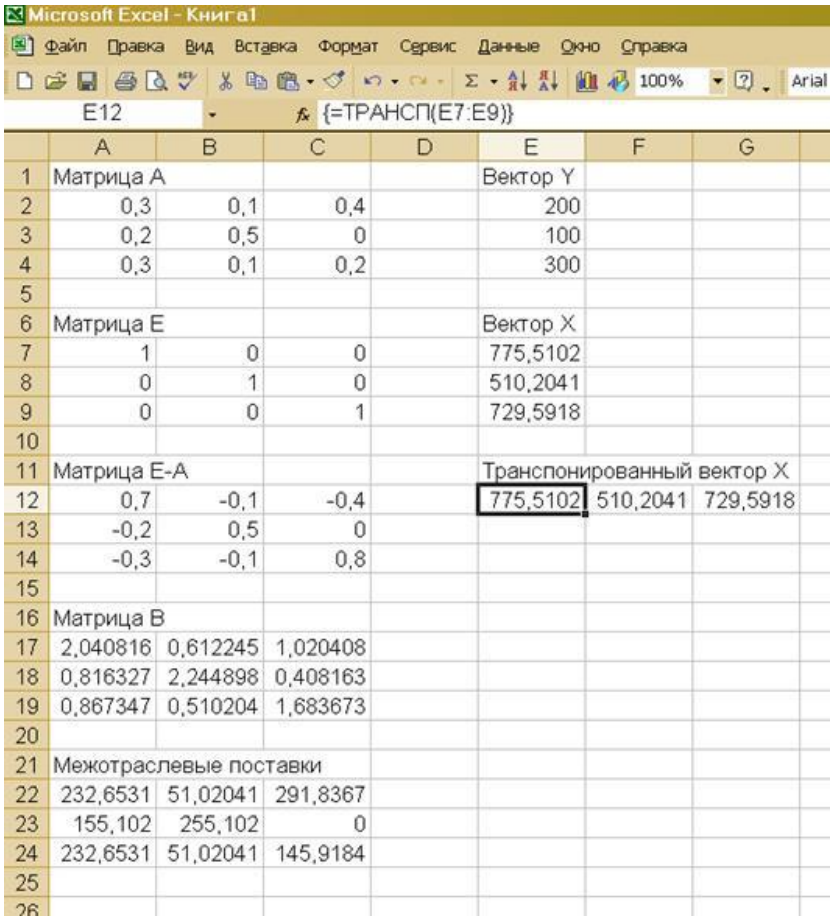
$$X = BY$$

Межотраслевые поставки продукции xij вычисляются по формуле:

$$X_{ij} = a_{ij}\, x_j$$

Процесс решения задачи средствами Microsoft Excel

Введите матрицу А в ячейки с адресами A2:C4 и вектор Y в ячейки с адресами E2:E4 (рис. 1).



	A	B	C	D	E	F	G
1	Матрица А				Вектор Y		
2	0,3	0,1	0,4		200		
3	0,2	0,5	0		100		
4	0,3	0,1	0,2		300		
5							
6	Матрица Е				Вектор X		
7	1	0	0		775,5102		
8	0	1	0		510,2041		
9	0	0	1		729,5918		
10							
11	Матрица Е-А				Транспонированный вектор X		
12	0,7	-0,1	-0,4		775,5102	510,2041	729,5918
13	-0,2	0,5	0				
14	-0,3	-0,1	0,8				
15							
16	Матрица В						
17	2,040816	0,612245	1,020408				
18	0,816327	2,244898	0,408163				
19	0,867347	0,510204	1,683673				
20							
21	Межотраслевые поставки						
22	232,6531	51,02041	291,8367				
23	155,102	255,102	0				
24	232,6531	51,02041	145,9184				
25							

Рис. 1. Задание исходных данных и последовательное выполнение плановых расчетов

2. Вычисление матрицы коэффициентов полных материальных затрат В.

2.1 Введите единичную матрицу Е в ячейки с номерами A7:C9.

2.2 Вычислите матрицу Е - А. Матрица Е - А является разностью двух матриц Е и А. Для вычисления разности двух матриц необходимо проделать следующее:

1) установите курсор мыши в левый верхний угол (это ячейка с адресом A12) результирующей матрицы E - A, которая будет расположена в ячейках с адресами A12:C14;
2) введите формулу =A7-A2 для вычисления первого элемента результирующей матрицы E – A,
введенную формулу скопируйте во все остальные ячейки результирующей матрицы.
3. Вычислите матрицу B = $(E - A)^{-1}$, являющейся обратной по отношению к матрице E - A.

4. Проверка продуктивности матрицы A.

Поскольку матрица B найдена, следовательно она существует. Все элементы матрицы B неотрицательны, поэтому матрица B - продуктивна.

5. Вычисление вектора валового выпуска X.

Вычисление вектора валового выпуска X находим по матричной формуле X = BY, в которой матрица B вычислена, а вектор Y задан.

6. Вычисление межотраслевых поставок продукции xij

Межотраслевые поставки продукции xij вычисляются по формуле

$$X_{ij} = a_{ij}\, x_{j},$$

где a_{ij} - элементы исходной матрицы A, расположенной в ячейках A2:C4, x_j - элементы вектора X, найденного выше в п. 4 и расположенные в ячейках E7:E9.

Для проведения вычислений x_{ij}, необходимо вычислить транспонированный вектор X^T относительно вектора X. При этом вектор-столбец X станет вектором-строкой X^T. Это необходимо для согласования размерностей дальнейшего умножения элементов векторов.

В результате в поле ячеек E12:G12 расположится транспонированный вектор Xт .

Затем вычислить межотраслевые поставки продукции xij . Для этого проделать следующие операции:

1. поставить курсор мыши в ячейку A22, в которой будет расположено значение x11. В этой ячейке набрать формулу =A2*E12, которая означает, что x11 = a11 x1 .
2. введенную формулу скопируйте во все остальные ячейки первой строки (в ячейки A22:C22, протащив мышью крестик в правом нижнем углу от ячейки A22 при нажатой левой кнопке мыши, до ячейки C22. При этом будут вычислены x12 = a12 x2 и x13 = a13 x3.

Затем в ячейке A23 наберите формулу =A3*E12 и повторяя аналогичную процедуру, получите значения x21 = a21 x1 , x22 = a22 x2 и x23 = a23 x3 . Повторите аналогичные действия для ячеек A24:C24.

В результате все межотраслевые поставки продукции будут найдены и расположатся в матрице с ячейками A22:C24.

Задание

Экономическая система состоит из трех отраслей, для которых матрица прямых затрат A и вектор конечного продукта Y даны в табл.1. Требуется определить:

1) Матрицу коэффициентов полных материальных затрат B;
2) Проверить продуктивность матрицы A;
3) Вектор валового выпуска X;
4) Межотраслевые поставки продукции xij.

Таблица 1. Матрица прямых затрат А и вектор конечного продукта Y.

№	Вектор конечного продукта Y	Матрица прямых затрат А
1	$Y = \begin{matrix} 100 \\ 200 \\ 400 \end{matrix}$	$A = \begin{matrix} 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{matrix}$
2	$Y = \begin{matrix} 200 \\ 100 \\ 400 \end{matrix}$	$A = \begin{matrix} 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.2 & 0.1 & 0.2 \end{matrix}$
3	$Y = \begin{matrix} 100 \\ 300 \\ 400 \end{matrix}$	$A = \begin{matrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.1 & 0.5 \end{matrix}$
4	$Y = \begin{matrix} 200 \\ 300 \\ 400 \end{matrix}$	$A = \begin{matrix} 0.5 & 0.3 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.4 \end{matrix}$
5	$Y = \begin{matrix} 100 \\ 200 \\ 150 \end{matrix}$	$A = \begin{matrix} 0.3 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{matrix}$
6	$Y = \begin{matrix} 300 \\ 200 \\ 100 \end{matrix}$	$A = \begin{matrix} 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.2 \end{matrix}$
7	$Y = \begin{matrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{matrix}$	$A = \begin{matrix} 0.6 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 \end{matrix}$
8	$Y = \begin{matrix} 400 \\ 300 \\ 200 \end{matrix}$	$A = \begin{matrix} 0.1 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ 0.6 & 0.2 & 0.1 \end{matrix}$
9	$Y = \begin{matrix} 100 \\ 150 \\ 200 \end{matrix}$	$A = \begin{matrix} 0.5 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.3 \end{matrix}$
10	$Y = \begin{matrix} 200 \\ 150 \\ 100 \end{matrix}$	$A = \begin{matrix} 0 & 0.2 & 0.7 \\ 0.5 & 0.4 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \end{matrix}$
11	$Y = \begin{matrix} 250 \\ 200 \\ 500 \end{matrix}$	$A = \begin{matrix} 0.1 & 0 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 & 0 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 \end{matrix}$
12	$Y = \begin{matrix} 300 \\ 500 \\ 100 \end{matrix}$	$A = \begin{matrix} 0 & 0.6 & 0.3 \\ 0.5 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 \end{matrix}$
13	$Y = \begin{matrix} 300 \\ 250 \\ 400 \end{matrix}$	$A = \begin{matrix} 0.2 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.7 \\ 0.5 & 0.1 & 0 \end{matrix}$
14	$Y = \begin{matrix} 150 \\ 250 \\ 350 \end{matrix}$	$A = \begin{matrix} 0.2 & 0.1 & 0.4 \\ 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.5 \end{matrix}$

15	$Y = \begin{matrix} 100 \\ 200 \\ 400 \end{matrix}$	$A = \begin{matrix} 0.5 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0 \end{matrix}$

Лабораторная работа № 8. Элементы теории графов

Краткая теория

Графы применяют для построения сетевых имитационных моделей, распределенных во времени или в пространстве объектов. Элементы теории графов применяются в различных приложениях при формализованном описании исследуемых сложных систем и процессов.

Граф G представляет собой геометрический объект, состоящий из точек, называемых **вершинами**, и соединяющих их линий, которые называют **ребрами** (рис. 1.6). Если какое-либо ребро a соединяет вершины x и y, то говорят, что вершины x и y **смежные**. При этом говорят, что ребро a **инцидентно** вершинам x, y, а вершины x, y **инцидентны** ребру a. Вершина графа называется **изолированной**, если к ней не подходит ни одно ребро. Ребра графа могут иметь ориентацию, которая отмечается стрелкой. Ориентированные ребра называют **дугами**.

Граф называется **ориентированным**, если он не имеет неориентированных ребер, и **неориентированным,** если он не имеет дуг.

Неориентированный граф называется **графом без петель**, если в нем нет петель – ребер, которые начинаются и заканчиваются в одной и той же вершине.

Граф, имеющий ребра любых видов, называется **смешанным**.

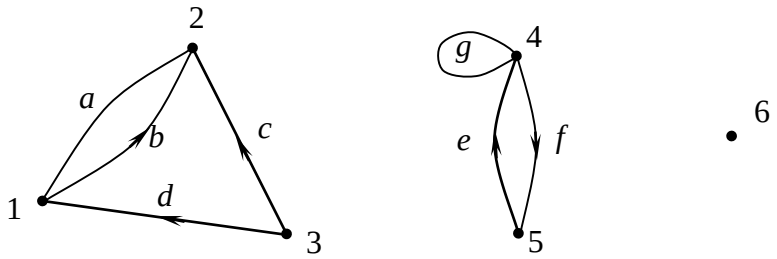


Рис. 1. Примеры изображения графа

Способы представления графов:

1. **Графическое задание.** Наглядной формой представления графа является его изображение в виде рисунка. На рисунке вершины обозначаются точками, а ребра – линиями, соединяющими соответствующие ребру вершины. Для дуг на линии указывается стрелка, указывающая из какой вершины в какую ведет дуга. Расположение вершин на рисунке не имеет значения, так же как и геометрическая форма линий. Однако, всегда следует стремиться изображать граф так, чтобы его графическое представление было наглядным. Возможный вариант изображения графа иллюстрирует рис. 1.

На рис. 1 ребро g – петля, вершина 6 изолированная, так как к ней не подходит ни одно из ребер. Изображенный на рис. 1 граф является смешанным. В конкретных задачах смешанные графы используются редко. Обычно они либо ориентированные, либо неориентированные.

1. Задание матрицей инциденций. Пусть n – число вершин, m – число ребер. Матрица инциденций графа $C = (c_{ij})$ размером $m \times n$ определяется так, что ее строки соответствуют вершинам, а столбцы – ребрам. Если a неориентированное ребро между вершинами i, j, то полагается $c_{ij} = c_{ji} = 1$, если a – дуга, ориентированная из i в j, то $c_{ij} = 1$, $c_{ji} = -1$, если a – петля, а c_{ij} – инцидентная ей вершина, то $c_{ij} = k$, где k – любое число, отличное от 0, 1 и –1.

Матрицу инцинденций в приложениях называют **матрицей соединений или узловой матрицей**.

Матрицы инциденций для графов, изображенных на рис. 2 а) и б), соответственно имеют вид:

$C =$

	a	b	c	d	e	f
1	1	1	1			
2	1			1	1	
3		1	1	1		
4					1	1

,

$C =$

	a	b	c	d	e
1	1	1	–1		
2	–1			1	–1
3		–1	1	–1	
4					1

.

Заметим, что в случае, когда G – ориентированный граф, сумма элементов всех строк (столбцов) матрицы равна нулю. Пусть G – неориентированный граф. **Маршрутом** на графе называют чередующуюся последовательность вершин и ребер, начинающуюся и заканчивающуюся вершиной, в которой любые рядом стоящие вершина и ребро инцидентны друг другу. С каждым маршрутом связан определенный обход графа. При выходе из первой вершины маршрута следующие вершины и ребра проходятся в нем в том порядке, в котором они указаны в маршруте. Часто, если это не ведет к неоднозначности, маршрут описывается в сокращенном виде. При этом в его записи остаются либо только вершины, либо только ребра.

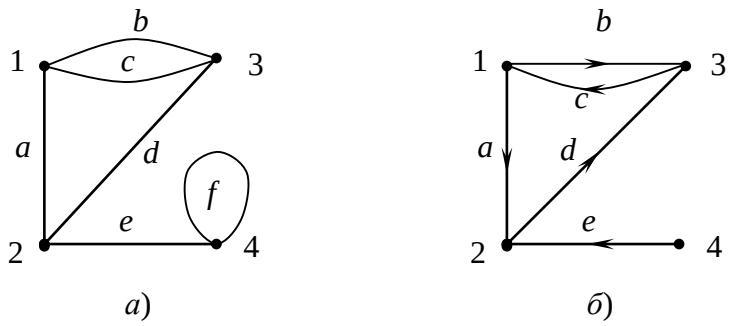


Рис. 2. Графы

Маршрут называется **циклическим**, если в нем первая и последняя вершины совпадают. Маршрут называется **цепью**, если он не содержит повторяющихся ребер. Циклическую цепь называют просто **циклом**. Маршрут называется **простым**, если в нем

все вершины разные, кроме, может быть, последней и первой. Простой циклический маршрут называется **простым маршрутом**.

Две вершины неориентированного графа называются **связными**, если имеется цепь, начинающаяся в одной из этих вершин и оканчивающаяся в другой.

Для графа, показанного на рис. 3 маршрут – $1a2b3b2e4g5c2$ не является цепью; $1a2b3b2e4g5c2e4f1$ – циклический маршрут, не являющийся цепью; $1a2e4f1h6i5$ – путь, не являющийся простым путем; $1a2b3d5c2e4f1$ – цикл не являющаяся простым циклом; $1a2e4g5d3$ – простой путь; $1a2b3d5g4f1$ – простой цикл.

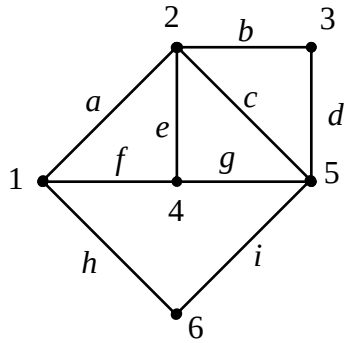


Рис. 3. Примеры маршрутов

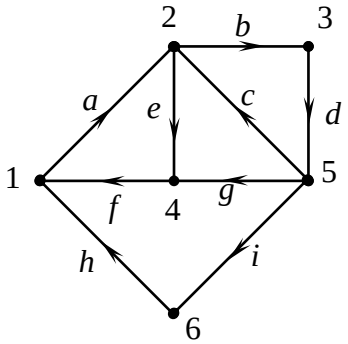


Рис. 4. Примеры маршрутов

Пусть теперь G ориентированный граф. В этом случае каждому маршруту соответствует определенное его прохождение с учетом ориентации дуг. Если все дуги маршрута проходятся в направлении стрелок ориентации ребер, то такой маршрут называется **ориентированным**.

Если ориентированный маршрут является циклическим, то он называется **циклическим** ориентированным маршрутом. Ориентированная цепь называется **путем**, а ориентированный цикл – **контуром**. Ориентированная простая цепь называется **простым путем**, а ориентированный простой цикл – **простым контуром**.

Если все вершины графа являются связными, то сам граф называется **связным**.

Для графа на рис. 4 имеем: $1a2b3d5c2e4f1a2$ – ориентированный маршрут, не являющийся путем; $1a2b3d5c2b3d5g4+1$ – ориентированный циклический маршрут, не являющийся контуром; $1a2b3d5c2e4$ – путь, не являющийся простым путем; $1a2b3d5c2e4f1$ – контур не являющийся простым; $1a2b3d5g4$ – простой путь; $1a2b3d5i6h1$ – простой контур.

Деревом связного графа называется его связный подграф, который содержит все вершины графа, но не содержит ни одного контура.

Дополнением дерева графа называется множество его ветвей, которое получается после исключения из графа всех ветвей дерева. Отдельные ветви дополнения дерева называются **ветвями связи**.

Рассмотрим граф на рис. 5. Тогда, например, деревом графа является подграф, включающий ветви $c,\ d,\ f$.

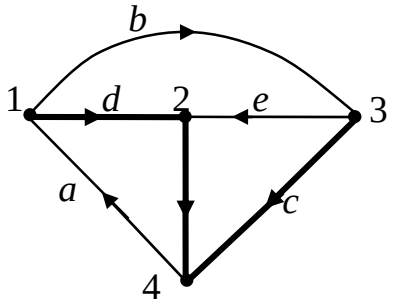


Рис. 5. Дерево графа

Дополнением графа служит множество ветвей a, b, e, которые являются ветвями связи.

Сечением графа называется множество его ветвей, исключение которых разделяет граф на два связных подграфа, одним из которых может быть изолированный узел, причем последующее добавление любой из них превращает граф в связный.

Сечение называется **главным**, если оно содержит только одну ветвь дерева, а остальные его ветви являются ветвями связи.

Простейшим примером сечений являются такие сечения, каждое из которых превращает одну из вершин графа в изолированную.

Контур называется **главным**, если он содержит только одну ветвь связи, а остальные ветви являются ветвями дерева.

Рассмотрим один из простых контуров графа (l_i). Выберем направление его обхода против или по часовой стрелке.

Матрица $B = (b_{ik})$ называется **контурной матрицей**, если ее строки соответствуют контурам (l_i), столбцы ветвям и при этом

$$b_{ik} = \begin{cases} 1, \text{ если } k-\text{я ветвь принадлежит } i-\text{му контуру и по направлению} \\ \quad \text{совпадает с направлением его обхода;} \\ -1, \text{ если } k-\text{я ветвь принадлежит } i-\text{му контуру и совпадает} \\ \quad \text{с направлением противоположным его обхода;} \\ 0, \text{ не принадледит.} \end{cases}$$

2. **Список ребер.** При данном способе задания графа отношение инцидентности задается списком ребер графа. При этом каждая строка списка соответствует ребру, и в ней записаны номера вершин, ему инцидентных. Для неориентированного графа порядок вершин в строке произвольный, для ориентированного – первым стоит номер или другое наименование начала дуги, вторым – ее конца.

Список ребер для графов, изображенных на рис. 3 и 4 имеет вид:

ребра	вершины	дуги	вершины
a	1,2	*a*	1,2
b	2,3	*b*	2,3
c	2,5	*c*	5,2
d	3,5	*d*	3,5
e	2,4	*e*	2,4
f	1,4	*f*	4,1
g	4,5	*g*	5,4
h	1,6	*h*	6,1
i	5,6	*i*	5,6

По списку ребер графа легко построить его матрицу инциденций. Каждая строка списка соответствует строке матрицы с тем же номером. Для неориентированного графа в строке списка указаны номера элементов строки матрицы инциденций, равные 1, а для ориентированного графа в этой строке первым стоит номер элемента строки, равный -1, вторым - номер элемента, равный 1.

3. **Матрица смежности графа.** Это квадратная матрица, столбцам и строкам которой соответствуют вершины графа. Для неориентированного графа каждый элемент матрицы равен количеству ребер, инцидентных *i -й* и *j –й* вершинам, а для ориентированного графа каждый элемент равен количеству ребер, с началом в *i -той* вершине и концом в *j- той.*

Матрицы смежности, соответствующие графам, изображенным на рис. 3 и 4 имеют вид:

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1		1		1		1
2	1		1	1	1	
3		1			1	
4	1	1			1	
5		1	1	1		1
6	1				1	

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1		1				
2			1	1		
3					1	
4	1					
5		1		1		1
6	1					

По матрице смежности легко строится список ребер, определяющий граф, а, соответственно, и матрица инциденций.

Задание

В качестве системы рассматривается работа посреднической мелкооптовой фирмы. Предполагается, что система может находиться только в одном из своих состояний:

S_0 — регистрация нового клиента,
S_1 — получение заказа на поставку товара,
S_2 — поиск и приобретение нужного товара,
S_3 — товар на складе фирмы,
S_4 — реализация товара клиенту,
S_5 — возврат клиентом на склад некачественного товара,
S_6 — устранение дефекта в мастерской и возврат на склад,
S_7 — списание в убыток (невозможность ремонта),
S_8 — хищение со склада.

Построить граф состояний системы, матрицу инциденций, список ребер и матрицу смежности.

Библиографический список

1. Моделирование систем и процессов: учебник для академического бакалавриата / под ред. В.Н. Волковой, В.Н. Козлова. – М.: Изд-во Юрайт, 2019. – 450 с.
2. Макарова И.В., Маврин В.Г., Маврин Г.В. Моделирование процессов и систем: уч. пособие / Набережные Челны: изд-во НЧИ КФУ, 2018.- 130 с.
3. Карпушкин С.В. Основы моделирования процессов и систем: уч. пособие / Тамбов. - 2015. – 80 с.
4. Кельтон В., Лоу А. Имитационное моделирование. Классика CS. – СПб.; Киев: Издательская группа BHV, 2004. – 847 с.
5. Имитационное моделирование производственных систем / А.А. Вавилов, Д.Х. Имаев, В.И. Плескунин и др. – М.: Машиностроение; Берлин: Ферлог Техник, 1983. – 416 с.
6. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия (индустриальная динамика). – М.: Прогресс, 1971. – 340 с.
7. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
8. Аюнов В.В. Имитационное моделирование технических систем. – Пермь: ИПЦ «Прокрость», 2017. – 242 с.
9. Петухов О.А. Моделирование: системное, имитационное, аналитическое / О.А. Петухов, А.В. Морозов, Е.О. Петухов. – СПб.: Изд-во СЗТУ, 2008. – 288 с.
10. Демидович Б.П. Численные методы анализа : приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения, учеб. пособие / Марон И.А., Шувалова Э.З.; под ред. Б.П. Демидовича; 4-е изд., стер. – СПб., М., Краснодар: Лань, 2008. - 400 с.